Контрольная работа

Теория игр

Оглавление

Задание 1

Сельскохозяйственное предприятие планирует посеять на площади 2000 га одну или две (в равной пропорции) из трех культур – A_1, A_2, A_3. Урожайности этих культур при прочих равных условиях зависят главным образом от погоды. Состояния погоды можно охарактеризовать четырьмя вариантами: B_1 – сухо, B_2 – нормально, B_3 – умеренно влажно, B_4 – влажно. Урожайности культур в зависимости от состояний погоды приведены в таблице, где конкретные числовые данные определяются по формулам:

$$a_{11} = 19 + (-1)^n \cdot 0,1 \cdot n + m = 19 + (-1)^3 \cdot 0,1 \cdot 3 + 1 = 17,7;$$

$$a_{22} = 13,5 + (-1)^n \cdot 0,1 \cdot n + m = 13,5 + (-1)^3 \cdot 0,1 \cdot 3 + 1 = 12,2;$$

$$a_{34} = 12 + (-1)^n \cdot 0,1 \cdot n + m = 12 + (-1)^3 \cdot 0,1 \cdot 3 + 1 = 10,7;$$

Урожайность культуры, ц/га	Состояние погоды				Функция цены, тыс руб за 1 ц
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	a_{11}	$a_{11}-6$	$a_{11}-8$	$a_{11}-11$	$6000-0,015\cdot U$
A_2	$a_{22}-5$	a_{22}	$a_{22}-1,5$	$a_{22}-7,5$	$7000-0,025\cdot U$
A_3	$a_{34}-9,5$	$a_{34}-2,5$	$a_{34}-1,5$	a_{34}	$8000-0,03\cdot U$
Потери, %	4	1	5	8	

План посева должен обеспечить наибольший доход. Количество предложенной к реализации продукции определяется итоговой величиной собранной продукции с учетом потерь в условиях конкретного состояния погоды. Предполагаемые потери для каждой культуры (до ее реализации) составляют в зависимости от состояний погоды 4%, 1%, 5%, 8% соответственно. Средняя цена реализации продукции формируется в соответствии с функцией цены для каждой культуры, указанной в таблице, где U – количество предложенной продукции.

Составить таблицу доходов (матрицу полезности). Определить оптимальную стратегию предприятия, доставляющую наилучший план посева в каждом из следующих случаев (характеризуемых различными информационными условиями или поведенческими принципами при выборе решения):

а) по статистическим данным известно, что состояния погоды B_1 и B_4 равновозможны, причем каждое из них наступает в (1+0,4·n = $2,2$) раза реже, чем состояние B_2 , и в (2+0,1·n=$2,3$) раза реже, чем состояние B_3 ;

б) используется критерий Вальда;

в) используется критерий минимаксного риска;

г) используется критерий Гурвица, причем уровень пессимизма (доверия) в (1+0,1·n=$1,3$) два раза выше уровня оптимизма.

Решение.

Таблица.

Урожайность культуры, ц/га	Состояние погоды				Функция цены, тыс руб за 1 ц
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	17,7	11,7	9,7	6,7	6000 – 0,015·U
A_2	7,2	12,2	10,7	4,7	7000 – 0,025·U
A_3	1,2	8,2	9,2	10,7	8000 – 0,03·U
Потери, %	4	1	5	8	

Далее рассчитываем урожай с учетом потерь:

Урожай (U) = урожайность * 2000 га – потери.

Для 2 культур:

Урожай (U) = урожайность 1 культуры * 1000 га + урожайность 2 культуры * 1000 га – потери.

Урожайность культуры, ц/га	Состояние погоды			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	17,7	11,7	9,7	6,7
A_2	7,2	12,2	10,7	4,7
A_3	1,2	8,2	9,2	10,7
Потери, %	4	1	5	8

Урожай, ц.	Состояние погоды				
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	33984	23166	18430	12328	
A_2	13824	24156	20330	8648	
A_3	2304	16236	17480	19688	
A_1+A_2	16992	11583	9215	6164	A_1
	6912	12078	10165	4324	A_2
A_1+A_3	16992	11583	9215	6164	A_1
	1152	8118	8740	9844	A_3
A_2+A_3	6912	12078	10165	4324	A_2
	1152	8118	8740	9844	A_3

Далее для каждой ячейки матрицы рассчитываем цену (по функции спроса).

Для 2 культур используем 2 функции.

Цена, т. р.	Состояние погоды				
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	5490,24	5652,51	5723,55	5815,08	
A_2	6654,4	6396,1	6491,75	6783,8	
A_3	7930,88	7512,92	7475,6	7409,36	
A_1+A_2	5745,12	5826,255	5861,775	5907,54	A_1
	6827,2	6698,05	6745,875	6891,9	A_2
A_1+A_3	5745,12	5826,255	5861,775	5907,54	A_1
	7965,44	7756,46	7737,8	7704,68	A_3
A_2+A_3	6827,2	6698,05	6745,875	6891,9	A_2
	7965,44	7756,46	7737,8	7704,68	A_3

Затем определяем выручку (урожай * цену), делим на 1000000, получаем единицу измерения млрд. руб.

Выручка, млрд. р.	Состояние погоды			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	186,58	130,95	105,49	71,69
A_2	91,99	154,50	131,98	58,67
A_3	18,27	121,98	130,67	145,88
A_1+A_2	144,81	148,38	122,59	66,21
A_1+A_3	106,80	130,45	121,64	112,26
A_2+A_3	56,37	143,87	136,20	105,65

Получили матрицу полезности, теперь по ней определяем наилучшее решение.

а) по статистическим данным известно, что состояния погоды B_1 и B_4 равновозможны, причем каждое из них наступает в 2,2 раза реже, чем состояние B_2 , и в 2,3 раза реже, чем состояние B_3 ;

Находим вероятности:

$$p(B_1) = p(B_4) = p$$
$$p(B_2) = 2,2p$$
$$p(B_3) = 2,3p$$
$$p(B_1) + p(B_2) + p(B_3) + p(B_4) = 1$$
$$p + 2,2p + 2,3p + p = 1$$
$$6,5p = 1$$
$$p = \frac{1}{6,5}$$

Умножаем построчно выигрыши на вероятности и складываем, получаем ожидаемые выигрыши.

Выручка, млрд. р.	Состояние погоды				Ожидаемые выигрыши
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	186,58	130,95	105,49	71,69	121,379
A_2	91,99	154,50	131,98	58,67	122,171
A_3	18,27	121,98	130,67	145,88	112,777
A_1+A_2	144,81	148,38	122,59	66,21	126,065
A_1+A_3	106,80	130,45	121,64	112,26	120,898
A_2+A_3	56,37	143,87	136,20	105,65	121,812
Вероят	0,153846	0,338462	0,353846	0,153846	

Максимальная выручка – при посадке культур A_1 и A_2.

б) используется критерий Вальда;

Находим минимальный выигрыш по каждой стратегии, и ищем максимальных из них.

Выручка, млрд. р.	Состояние погоды				Min
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	186,58	130,95	105,49	71,69	71,688
A_2	91,99	154,50	131,98	58,67	58,666
A_3	18,27	121,98	130,67	145,88	18,273
A_1+A_2	144,81	148,38	122,59	66,21	66,215
A_1+A_3	106,80	130,45	121,64	112,26	106,797
A_2+A_3	56,37	143,87	136,20	105,65	56,366

По данному критерию выбираем - посадку культур A_1 и A_3.

в) используется критерий минимаксного риска;

Находи матрицу рисков (разница между максимальным выигрышем в столбце и текущим выигрышем).

Далее применяем критерий минимакса.

Выручка, млрд. р.	Состояние погоды				Max
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	0,00	23,56	30,72	74,19	74,187
A_2	94,59	0,00	4,22	87,21	94,590
A_3	168,31	32,52	5,53	0,00	168,308
A_1+A_2	41,77	6,12	13,61	79,66	79,661
A_1+A_3	79,78	24,05	14,56	33,62	79,783
A_2+A_3	130,21	10,64	0,00	40,23	130,215

Минимальный риск – при посадке культуры A_1.

г) используется критерий Гурвица, причем уровень пессимизма (доверия) в ($1+0,3\cdot n=1,3$) раза выше уровня оптимизма.

Уровень пессимизма:

$$\gamma+\frac{1}{1,3}\gamma=1$$

$$\gamma=\frac{1}{1+\frac{1}{1,3}}=0,5652$$

Формула выигрыша: минимальный * критерий пессимизма + максимальный * (1 - критерий пессимизма).

Получаем.

Выручка, млрд. р.	Состояние погоды				Min	Max	Расчетный
	B_1	B_2	B_3	B_4			
A_1	186,58	130,95	105,49	71,69	71,688	186,580	121,643
A_2	91,99	154,50	131,98	58,67	58,666	154,504	100,337
A_3	18,27	121,98	130,67	145,88	18,273	145,875	73,754
A_1+A_2	144,81	148,38	122,59	66,21	66,215	148,385	101,942
A_1+A_3	106,80	130,45	121,64	112,26	106,797	130,452	117,083
A_2+A_3	56,37	143,87	136,20	105,65	56,366	143,866	94,411

По данному критерию выбираем - посадку культуры A_1.

Итак, по большинству критериев предпочтительнее - посадка культуры A_1.

Задание 2

Решить игру двух игроков с платежной матрицей H методами линейного программирования. Проверить существование седловой точки.

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & 2 & 3 & -2 \\ -3 & h_{22} & 2 & h_{24} \\ -2 & 4 & h_{33} & -1 \end{pmatrix}$$

Решение.

$h_{11} = 1 + (-1)^n (n-5) = 3$

$h_{22} = 3 + (-1)^m m = 2$

$h_{24} = 2 + (-1)^n (n-4) = 3$

$h_{33} = -2 + (-1)^n (n-7) = 2$

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & 2 & 3 & -2 \\ -3 & h_{22} & 2 & h_{24} \\ -2 & 4 & h_{33} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & -2 \\ -3 & 2 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

В матрице присутствуют отрицательные элементы. Для упрощения расчетов добавим к элементам матрицы (3). Такая замена не изменит решения игры, изменится только ее цена.

6	5	6	1
0	5	5	6
1	7	5	2

Математические модели пары двойственных задач линейного программирования можно записать так:

$F(x) = x_1+x_2+x_3 \to \min$
$6x_1+x_3 \geq 1$
$5x_1+5x_2+7x_3 \geq 1$
$6x_1+5x_2+5x_3 \geq 1$
$x_1+6x_2+2x_3 \geq 1$
$\Phi(y) = y_1+y_2+y_3+y_4 \to \max$
$6y_1+5y_2+6y_3+y_4 \leq 1$

$5y_2+5y_3+6y_4 \leq 1$
$y_1+7y_2+5y_3+2y_4 \leq 1$

Решим прямую задачу линейного программирования симплексным методом, с использованием симплексной таблицы.

Для построения первого опорного плана в системе уравнений уже имеются базисные переменные.

$6x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 1x_4 + 1x_5 + 0x_6 + 0x_7 = 1$

$0x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 0x_5 + 1x_6 + 0x_7 = 1$

$1x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 1x_7 = 1$

Решим систему уравнений относительно базисных переменных: x_5, x_6, x_7

Полагая, что свободные переменные равны 0, получим первый опорный план: (0,0,0,0,1,1,1)

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_5	1	6	5	6	1	1	0	0
x_6	1	0	5	5	6	0	1	0
x_7	1	1	7	5	2	0	0	1
F(X0)	0	-1	-1	-1	-1	0	0	0

Текущий опорный план неоптимален, так как в индексной строке находятся отрицательные коэффициенты.

В качестве ведущего выберем столбец, соответствующий переменной x_4, так как это наибольший коэффициент по модулю.

Вычислим значения D_i по строкам как частное от деления: b_i / a_{i4}

и из них выберем наименьшее:

min (1 : 1 , 1 : 6 , 1 : 2) = $^1/_6$

Следовательно, 2-ая строка является ведущей.

Разрешающий элемент равен (6) и находится на пересечении ведущего столбца и ведущей строки.

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	min

x_5	1	6	5	6	1	1	0	0	1
x_6	1	0	5	5	6	0	1	0	$^1/_6$
x_7	1	1	7	5	2	0	0	1	$^1/_2$
F(X1)	0	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0

Формируем следующую часть симплексной таблицы. Вместо переменной x_6 в план 1 войдет переменная x_4.

Получаем новую симплекс-таблицу:

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_5	$^5/_6$	6	$4^1/_6$	$5^1/_6$	0	1	$^{-1}/_6$	0
x_4	$^1/_6$	0	$^5/_6$	$^5/_6$	1	0	$^1/_6$	0
x_7	$^2/_3$	1	$5^1/_3$	$3^1/_3$	0	0	$^{-1}/_3$	1
F(X1)	$^1/_6$	-1	$^{-1}/_6$	$^{-1}/_6$	0	0	$^1/_6$	0

Текущий опорный план неоптимален, так как в индексной строке находятся отрицательные коэффициенты.

В качестве ведущего выберем столбец, соответствующий переменной x_1, так как это наибольший коэффициент по модулю.

Вычислим значения D_i по строкам как частное от деления: b_i / a_{i1}

и из них выберем наименьшее:

min ($^5/_6$: 6 , - , $^2/_3$: 1) = $^5/_{36}$

Следовательно, 1-ая строка является ведущей.

Разрешающий элемент равен (6) и находится на пересечении ведущего столбца и ведущей строки.

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	min
x_5	$^5/_6$	6	$4^1/_6$	$5^1/_6$	0	1	$^{-1}/_6$	0	$^5/_{36}$
x_4	$^1/_6$	0	$^5/_6$	$^5/_6$	1	0	$^1/_6$	0	-
x_7	$^2/_3$	1	$5^1/_3$	$3^1/_3$	0	0	$^{-1}/_3$	1	$^2/_3$
F(X2)	$^1/_6$	-1	$^{-1}/_6$	$^{-1}/_6$	0	0	$^1/_6$	0	0

Формируем следующую часть симплексной таблицы. Вместо переменной x_5 в план 2 войдет переменная x_1.

Получаем новую симплекс-таблицу:

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	$^5/_{36}$	1	$^{25}/_{36}$	$^{31}/_{36}$	0	$^1/_6$	$^{-1}/_{36}$	0
x_4	$^1/_6$	0	$^5/_6$	$^5/_6$	1	0	$^1/_6$	0
x_7	$^{19}/_{36}$	0	$4^{23}/_{36}$	$2^{17}/_{36}$	0	$^{-1}/_6$	$^{-11}/_{36}$	1
F(X2)	$^{11}/_{36}$	0	$^{19}/_{36}$	$^{25}/_{36}$	0	$^1/_6$	$^5/_{36}$	0

Индексная строка не содержит отрицательных элементов - найден оптимальный план

Среди значений индексной строки нет отрицательных. Поэтому эта таблица определяет оптимальный план задачи.

Окончательный вариант симплекс-таблицы:

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	$^5/_{36}$	1	$^{25}/_{36}$	$^{31}/_{36}$	0	$^1/_6$	$^{-1}/_{36}$	0
x_4	$^1/_6$	0	$^5/_6$	$^5/_6$	1	0	$^1/_6$	0
x_7	$^{19}/_{36}$	0	$4^{23}/_{36}$	$2^{17}/_{36}$	0	$^{-1}/_6$	$^{-11}/_{36}$	1
F(X3)	$^{11}/_{36}$	0	$^{19}/_{36}$	$^{25}/_{36}$	0	$^1/_6$	$^5/_{36}$	0

Оптимальный план:

$x_1 = {}^5/_{36}$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = {}^1/_6$

$F(X) = 1\bullet{}^5/_{36} + 1\bullet 0 + 1\bullet 0 + 1\bullet{}^1/_6 = {}^{11}/_{36}$

Используя последнюю симплекс таблицу найдем, оптимальный план двойственной задачи.

Оптимальный план двойственной задачи равен:

$y_1 = {}^1/_6$

$y_2 = {}^5/_{36}$

$y_3 = 0$

$Z(Y) = 1*{}^1/_6+1*{}^5/_{36}+1*0 = {}^{11}/_{36}$

Цена игры будет равна $g = 1/F(x)$, а вероятности применения стратегий игроков:

$q_i = g*y_i$; $p_i = g*x_i$.

Цена игры: $g = 1 : {}^{11}/_{36} = {}^{36}/_{11}$

$p_1 = {}^{36}/_{11} \bullet {}^{1}/_{6} = {}^{6}/_{11}$

$p_2 = {}^{36}/_{11} \bullet {}^{5}/_{36} = {}^{5}/_{11}$

$p_3 = {}^{36}/_{11} \bullet 0 = 0$

Оптимальная смешанная стратегия игрока 1:

$P = ({}^{6}/_{11}; {}^{5}/_{11}; 0)$

$q_1 = {}^{36}/_{11} \bullet {}^{5}/_{36} = {}^{5}/_{11}$

$q_2 = {}^{36}/_{11} \bullet 0 = 0$

$q_3 = {}^{36}/_{11} \bullet 0 = 0$

$q_4 = {}^{36}/_{11} \bullet {}^{1}/_{6} = {}^{6}/_{11}$

Оптимальная смешанная стратегия игрока 2:

$Q = ({}^{5}/_{11}; 0; 0; {}^{6}/_{11})$

Поскольку ранее к элементам матрицы было прибавлено число (3), то вычтем это число из цены игры.

$3^{3}/_{11} - 3 = {}^{3}/_{11}$

Цена игры: $v={}^{3}/_{11}$

Задание 3

Два предприятия A и B регулярно поставляют на местный рынок сбыта продукцию двух видов, причем каждое предприятие для очередной поставки может выбрать только один вид продукции. Свой выбор предприятия осуществляют независимо друг от друга. Предприятие A может поставить N_1 единиц продукции 1-го вида или N_2 единиц продукции 2-го вида, а предприятие B – M_1 или M_2 единиц продукции соответственно. Цены на продукцию (в условных денежных единицах) определяются в зависимости от количества поставленной на рынок продукции и описываются следующими функциями:

$f_1(X_1) = c_1 - k_1X_1$ для продукции 1-го вида,

$f_2(X_2) = c_2 - k_2X_2$ для продукции 2-го вида,

где X_1, X_2 – количество поставленной на рынок продукции 1-го или 2-го вида соответственно.

Основная цель каждого предприятия – получение наибольшего (в данных условиях) дохода.

Требуется:

1) составить таблицу доходов предприятий;

2) найти ситуации равновесия (по Нэшу) и соответствующие выигрыши предприятий;

3) привести графическую интерпретацию решения данной игры.

Конкретные числовые данные определяются по формулам:

$N_1 = 280 + (-1)^n \cdot n + 2m = 279$; $N_2 = 400 + (-1)^n \cdot n + 2m = 399$;

$M_1 = 650 - N_1 + m = 372$; $M_2 = 720 - N_2 + m = 322$;

$c_1 = 250 + (-1)^n \cdot 3n = 241$; $c_2 = 350 + (-1)^n \cdot 5n = 335$;

$k_1 = 0,2$; $k_2 = 0,3$;

Решение.

Предприятие A может поставить *279* единиц продукции 1-го вида или *399* единиц продукции 2-го вида, а предприятие B – *372* или *322* единиц продукции соответственно.

Цены на:

$f_1(X_1) = 241 - 0{,}2X_1$ для продукции 1-го вида,

$f_2(X_2) = 335 - 0{,}3X_2$ для продукции 2-го вида,

где X_1, X_2 – количество поставленной на рынок продукции 1-го или 2-го вида соответственно.

1) таблица доходов предприятий;

Сначала находим наполненность рынка (X) по каждому виду товара, суммируем поставки.

Поставки		B_1	B_2	
A_1	1 вид	651	279	279
	2 вид	0	322	0
A_2	1 вид	372	0	0
	2 вид	399	721	399
		372	322	
		1 вид	2 вид	

Затем находим цену на товары.

Цены		B_1	B_2
A_1	1 вид	110,8	185,2
	2 вид	335	238,4
A_2	1 вид	166,6	241
	2 вид	215,3	118,7

Теперь находим доходы каждого предприятия.

Доходы		B_1	B_2
A_1	1 предпр	30913,2	51670,8
	2 предпр	41217,6	76764,8
A_2	1 предпр	85904,7	96159
	2 предпр	61975,2	77602

2) ситуации равновесия (по Нэшу) и соответствующие выигрыши предприятий;

Положим, оба предприятия поставляют товар 1.

Доходы		B_1	B_2
A_1	1 предпр	30913,2	51670,8
	2 предпр	41217,6	76764,8
A_2	1 предпр	85904,7	96159
	2 предпр	61975,2	77602

1-му предприятию выгодно изменить поставку на 2-й товар (85904,7 больше 30913,2).

Доходы		B_1	B_2
A_1	1 предпр	30913,2	51670,8
	2 предпр	41217,6	76764,8
A_2	1 предпр	85904,7	96159
	2 предпр	61975,2	77602

2-му предприятию выгодно изменить поставку на 2-й товар (76764,8 больше 41217,6).

Доходы		B_1	B_2
A_1	1 предпр	30913,2	51670,8
	2 предпр	41217,6	76764,8
A_2	1 предпр	85904,7	96159
	2 предпр	61975,2	77602

То есть стратегия поставки только первого товара обоими предприятиями не является равновесием Нэша.

Аналогично анализируем прочие стратегии, и выявляем, что равновесием Нэша является стратегия «оба предприятия поставляют 2 товар».

Доходы		B_1	B_2
A_1	1 предпр	30913,2	51670,8
	2 предпр	41217,6	76764,8
A_2	1 предпр	85904,7	96159
	2 предпр	61975,2	77602

По направлению движения стрелок доходы уменьшаются, в одностороннем порядке ни одно из предприятий не отклонится от данных стратегий.

3) графическая интерпретация решения данной игры.

Составляем условия:

$C = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22} = -10503{,}3$

$\alpha = a_{22} - a_{12} = 44488{,}2$

$D = b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22} = -19920{,}4$

$\beta = b_{22} - b_{21} = 837{,}2$

Система уравнений.

$$\begin{cases} (p-1)(Cq-\alpha) \geq 0 \\ p(Cq-\alpha) \geq 0 \\ (q-1)(Dp-\beta) \geq 0 \\ q(Dp-\beta) \geq 0 \end{cases} \to \begin{cases} (p-1)(-10503{,}3q-44488{,}2) \geq 0 \\ p(-10503{,}3q-44488{,}2) \geq 0 \\ (q-1)(-19920{,}4p-837{,}2) \geq 0 \\ q(-19920{,}4p-837{,}2) \geq 0 \end{cases}$$

$p = 0 \to q \geq 1$

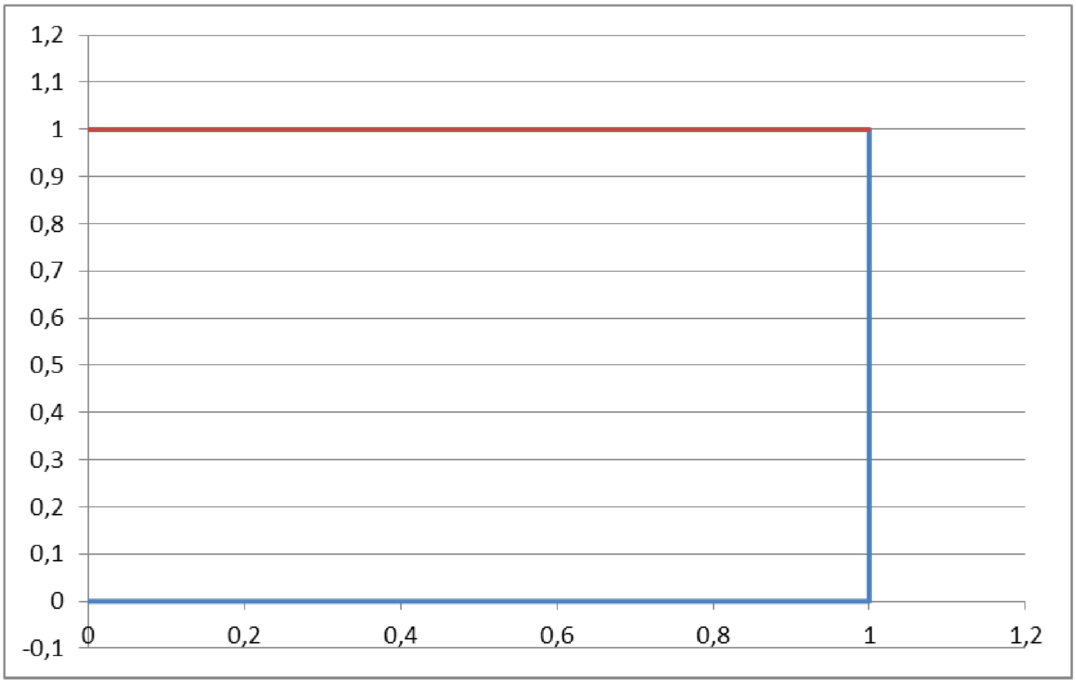
$p = 1 \to q \leq 1$

$0 \leq p \leq 1 \to q = 1$

$q = 0 \to p \geq 1$

$q = 1 \to p \leq 1$

$0 \leq q \leq 1 \to p = 1$



Равновесная стратегия (1;1).

Задание 4

В игре двух игроков с платежной матрицей H:

а) проверить существование седловой точки;

б) найти решение игры, используя графическую интерпретацию и выполняя аналитические вычисления.

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & 2 & h_{13} & -5 \\ -5 & h_{22} & h_{23} & 2 \end{pmatrix}$$

$$h_{11} = 3 + (-1)^n (n-2)$$

$$h_{13} = -3 + (-1)^n m$$

$$h_{22} = -2 + (-1)^n (n-m)$$

$$h_{23} = 1 + m$$

Решение.

$$h_{11} = 3 + (-1)^3 (3-2) = 2$$

$$h_{13} = -3 + (-1)^n m = -4$$

$$h_{22} = -2 + (-1)^n (n-m) = -4$$

$$h_{23} = 1 + m = 2$$

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & 2 & h_{13} & -5 \\ -5 & h_{22} & h_{23} & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 & -5 \\ -5 & -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Проверяем, имеет ли платежная матрица седловую точку.

Игроки	B_1	B_2	B_3	B_4	a = min(A_i)
A_1	2	2	-4	-5	-5
A_2	-5	-4	2	2	-5
b = max(B_i)	2	2	2	2	

Нижняя цена игры a = max(a_i) = -5,.

Верхняя цена игры b = min(b_j) = 2.

Что свидетельствует об отсутствии седловой точки, так как a ≠ b, тогда цена игры находится в пределах -5 ≤ y ≤ 2.

Проверяем платежную матрицу на доминирующие строки и доминирующие столбцы.

С позиции проигрышей игрока B стратегия B_1 доминирует над стратегией B_2 (все элементы столбца 1 меньше элементов столбца 2), следовательно исключаем 2-й столбец матрицы. Вероятность q_2 = 0.

С позиции проигрышей игрока B стратегия B_4 доминирует над стратегией B_3 (все элементы столбца 4 меньше элементов столбца 3), следовательно исключаем 3-й столбец матрицы. Вероятность q_3 = 0.

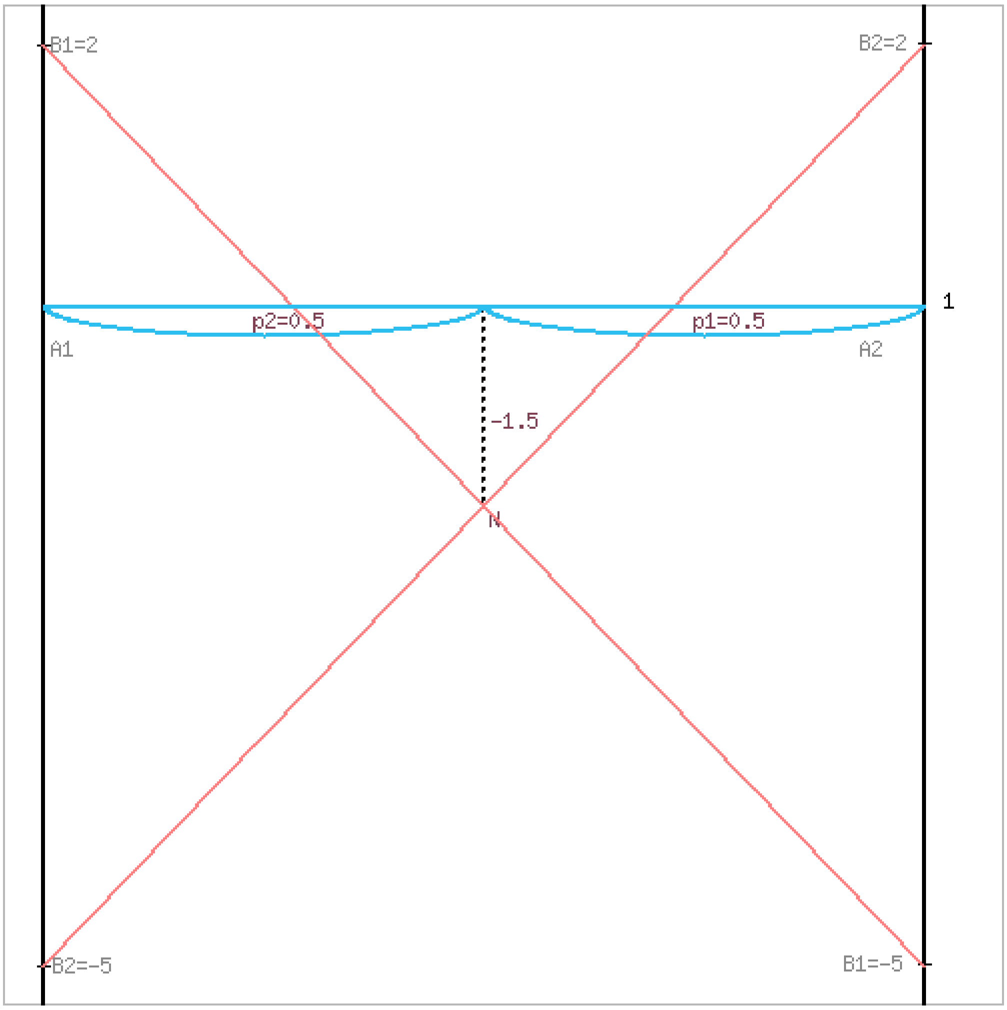
Переходим к игре.

$$H = \begin{pmatrix} 2 & - & - & -5 \\ -5 & - & - & 2 \end{pmatrix}$$

Решим задачу геометрическим методом:

По оси абсцисс откладывается отрезок, длина которого равна 1. Левый конец отрезка (точка x = 0) соответствует стратегии A_1, правый - стратегии A_2 (x = 1). Промежуточные точки x соответствуют вероятностям некоторых смешанных стратегий $S_1 = (p_1,p_2)$.

На левой оси ординат откладываются выигрыши стратегии A_1. На линии, параллельной оси ординат, из точки 1 откладываются выигрыши стратегии A_2.



Максиминной оптимальной стратегии игрока A соответствует точка N, лежащая на пересечении прямых B_1B_1 и B_2B_2, для которых можно записать следующую систему уравнений:

$y = 2 + (-5 - 2)p_2$

$y = -5 + (2 - (-5))p_2$

Откуда

$p_1 = {}^1/_2$

$p_2 = {}^1/_2$

Цена игры, $y = {}^{-3}/_2$

Теперь можно найти минимаксную стратегию игрока B, записав соответствующую систему уравнений

$2q_1 - 5q_4 = y$

$-5q_1 + 2q_4 = y$

$q_1+q_2 = 1$

или

$2q_1-5q_4 = {}^{-3}/_2$

$-5q_1+2q_4 = {}^{-3}/_2$

$q_1+q_2 = 1$

Решая эту систему, находим:

$q_1 = {}^1/_2$.

$q_4 = {}^1/_2$.

Поскольку из исходной матрицы были удалены и столбцы, то найденные векторы вероятности можно записать в виде:

$P({}^1/_2,{}^1/_2)$

$Q({}^1/_2,0,0,{}^1/_2)$

Цена игры, $y = {}^{-3}/_2$

Задание 5

Смешанное расширение бескоалиционной игры. Равновесие по Нэшу в смешанных стратегиях. Свойства и условия существования равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях.

Пусть:

$\mathrm{I}=\{1,2,\dots,n\}$ - множество игроков;

X_i - множество стратегий *i*-го игрока $(i=1,\dots,n)$.

Игроки, независимо друг от друга, выбирают стратегии:

I выбрал стратегию $x_1 \in \mathrm{X}_1$,

II выбрал стратегию $x_2 \in \mathrm{X}_2$,

……………………………………..

n-й выбрал стратегию $x_n \in \mathrm{X}_n$.

Возникла ситуация

$x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in \mathrm{X}=\mathrm{X}_1\times\mathrm{X}_2\times\ldots\times\mathrm{X}_n$ - множество ситуаций.

Каждый из игроков умеет оценивать для него степень важности той или иной ситуации.

$\mathrm{H}_i(x)$ - выигрыш *i*-го игрока в ситуации *x*.

$\mathrm{H}_i:\mathrm{X}\to R$ - функция выигрыша *i*-го игрока.

Составим вектор выигрышей

$\mathrm{H}(x)=(\mathrm{H}_1(x),\mathrm{H}_2(x),\dots,\mathrm{H}_n(x))$.

$\mathrm{H}:\mathrm{X}\to R^n$ - векторная функция выигрышей.

Определение: Даны I, X, определена вектор-функция выигрышей $\mathrm{H}:\mathrm{X}\to R^n$. Тогда $\Gamma=\langle \mathrm{I},\mathrm{X},\mathrm{H}\rangle$ - бескоалиционная игра n лиц в нормальной форме.

Пример:

$n=2 \quad \mathrm{H}_2(x) = -\mathrm{H}_1(x) \ \forall x \in \mathrm{X}$ - антагонистическая игра.

$n=2$
$\mathrm{X}_1 = \{1,2,\ldots,m_1\}$
$\mathrm{X}_2 = \{1,2,\ldots,m_2\}$
$(i,j) \in \mathrm{X}_1 \times \mathrm{X}_2 \quad i \in \mathrm{X}_1,\ j \in \mathrm{X}_2$
$a_{ij} = \mathrm{H}_1(i,j)$
$b_{ij} = \mathrm{H}_2(i,j)$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m_2} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m_1 1} & \ldots & a_{m_1 m_2} \end{pmatrix}$ - матрица выигрышей I игрока;

$\mathrm{B} = (b_{ij})$ - матрица выигрышей II игрока.

Имеем бескоалиционную игру двух лиц (или биматричную игру).

Если $\mathrm{B} = -\mathrm{A}$, то это матричная игра.

Имеем конечную бескоалиционную игру n лиц: $I = \{1,2,...,n\}$.

$X_i = \{1,2,...,m_i\}$- множество стратегии i-го игрока.

$X = X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ - множество ситуации.

$x_i \in X_i$ - i-ая стратегия игрока.

$x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in X$.

$H_i(x)$ - выигрыш i-го игрока в ситуации x.

$H(x) = (H_1(x), ..., H_n(x))$.

$\Gamma = \langle I, X, H \rangle$ - конечная бескоалиционная игра.

Определение: Смешанной стратегией i-го игрока называется случайная величина со значениями в X_i.

ξ_i	1	2	$\ldots$	m_i
P	$p_i(1)$	$p_i(2)$		$p_i(m_i)$

Из вероятностей формируем вектор вероятностей: $p_i = (p_i(1), p_i(2),..., p_i(m_i))$.

Каждой ξ_i ставим в соответствие вероятность: $\xi_i \leftrightarrow p_i \in R^{m_i}$.

Следовательно множество смешанных стратегий i-го игрока можно записать через соответствующие им вероятности

$$\overline{X_i} = \left\{ p_i = (p_i(1),..., p_i(m_i)) : \forall k \quad p_i(k) \ge 0, \ \sum_{k=1}^{m_i} p_i(k) = 1 \right\}.$$

Множество смешанных ситуаций: $\overline{X} = \overline{X_1} \times \overline{X_2} \times ... \times \overline{X_n} \subset R^m$, где $m = \sum_{i=1}^{m_i} m_i$.

Смешанная ситуация $p \in \overline{X}$ представляет собой элемент декартова произведения: $p = (p_1, p_2,..., p_n) \in \overline{X}$.

Определение: Выигрыш – математическое ожидание случайного выигрыша в ситуации p.

Все игроки выбирают свои стратегии независимо друг от друга. Тогда выигрыш i-го игрока в ситуации p можно записать

$$\overline{H_i}(p) = \sum_{x_1 \in X_1} \sum_{x_2 \in X_2} ... \sum_{x_n \in X_n} H_i(x_1, x_2,..., x_n) \cdot p_1(x_1) \cdot p_2(x_2) \cdot ... \cdot p_n(x_n),$$

где $x = (x_1, x_2,..., x_n) \in X$.

$p(x) = p_1(x_1) \cdot p_2(x_2) \cdot ... \cdot p_n(x_n)$ - вероятность возникновения ситуации x.

$$\overline{H_i}(p) = \sum_{x \in X} H_i(x) \cdot p(x).$$

Определение: Смешанным расширением конечной бескоалиционной игры $\Gamma = \langle I, X, H \rangle$ называется игра $\overline{\Gamma} = \langle I, \overline{X}, \overline{H} \rangle$, где $\overline{H}(p) = (\overline{H_1}(p),..., \overline{H_n}(p))$.

Пример: Игра «Семейный спор»

$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$;

$X_1 = X_2 = \{\Phi, T\}$.

ξ_i	1	2
P	$p_1(1)$	$p_1(2)$

ξ_2	1	2
P	$p_2(1)$	$p_2(2)$

$p_1(1)=t$, $p_1(2)=1-t \ \Rightarrow \ p_1=(t,1-t) \ \ 0\le t\le 1$;

$p_2(1)=u$, $p_2(2)=1-u \ \Rightarrow \ p_2=(u,1-u) \ \ 0\le u\le 1$;

$p=(p_1,p_2)$.

$\overline{H_1}(p)=4tu+0\cdot t(1-u)+0\cdot(1-t)\cdot u+1\cdot(1-t)(1-u)$:

$\overline{H_2}(p)=1\cdot tu+0\cdot t(1-u)+0\cdot(1-t)\cdot u+4(1-t)(1-u)$.

Определение: Ситуация p^* называется ситуацией равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях для игры $\Gamma=\langle I,X,H\rangle$, если p^* является ситуацией равновесия по Нэшу в смешанном расширении этой игры, т.е. игры $\overline{\Gamma}=\langle I,\overline{X},\overline{H}\rangle$, т.е. $\forall i\in I$, $\forall p_i\in\overline{X_i}$, $\overline{H_i}(p^*\|\,p_i)\le\overline{H_i}(p^*)$, где $p^*=(p_1{}^*,...,p_i{}^*,...,p_n{}^*)$, $p^*\|\,p_i=(p_1{}^*,...,p_i,...,p_n{}^*)$, т.е. выигрыш игрока в смешанных стратегиях не может быть увеличен, если игрок меняет только свою собственную стратегию.

Теорема Нэша: Любая конечная бескоалиционная игра имеет ситуацию равновесия в смешанных стратегиях.

Доказательство: $\overline{X}$ - множество всех ситуаций в смешанных стратегиях.

$\overline{X}=\{p=(p_1,...,p_n):p_i\in\overline{X_i}\}$;

$\overline{X_i}=\left\{p_i=(p_i(1),...,p_i(m_i)):\forall k \ \ p_i(k)\ge 0 \ \ \sum_{k=1}^{m_i}p_i(k)=1\right\}$ - выпуклый компакт.

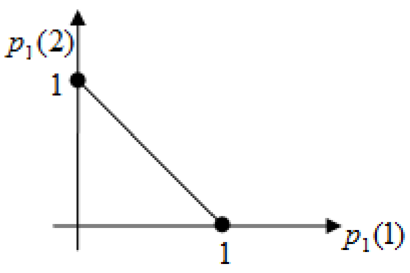


Рис.1

1. $\overline{X} = \overline{X_1} \times \overline{X_2} \times ... \times \overline{X_n}$ - выпуклый компакт.

2. $\overline{H_i}(p) = \sum_{x \in X} H_i(x) p_1(x) p_2(x) ... p_n(x)$ - функция выигрыша линейна по $p_i(x)$ при остальных фиксированных переменных, следовательно, вогнута по p_i.

3. $\overline{H_i}(p)$ непрерывна по совокупности переменных $p_1,..., p_n$.

По теореме о существовании ситуации равновесия в бескоалиционных играх данная игра $\overline{\Gamma}$ имеет ситуацию равновесия.

Теорема доказана.

Теорема о переходе к чистым стратегиям: для того чтобы ситуация $p*$ была ситуацией равновесия по Нэшу, в смешанных стратегиях необходимо и достаточно, чтобы $\forall i \in I$, $\forall x_i \in X_i$ $\overline{H_i}(p^* \| x_i) \le H_i(p^*)$.

Схема доказательства:

$p^* \| x_i$ - ситуация $p*$, в которой стратегия p_i* заменена на чистую стратегию $x_i = (0,..., \underset{x_i}{1},...,0)$.

Необходимость. По определению ситуации равновесия по Нэшу:

$\forall i \in I$ $\forall p_i \in \overline{X}$ $H_i(p^* \| x_i) \le H_i(p^*)$.

Необходимость доказана.

Достаточность доказать самостоятельно. Теорема доказана.

Теорема о дополняющей нежесткости: Пусть $p^* = (p_1*,..., p_i*,..., p_n*)$ - ситуация равновесия по Нэшу. Тогда

если $p_i*(x_i) > 0$, то $H_i(p^* \| x_i) = H_i(p^*)$,

если $H_i(p^* \| x_i) < H_i(p^*)$, то $p_i*(x_i) = 0$.

Экономический смысл:

1. Если игрок в ситуации равновесия с положительной вероятностью использует стратегию x_i, то выигрыш этого игрока не изменится при замене стратегии p_i* на чистую x_i.

2. Если выигрыш игрока в ситуации x_i меньше, чем в ситуации равновесия, то вероятность того, что он будет использовать эту стратегию, равна 0.