Вариант 4

Задание 1. Прогнозирование экономических процессов.
В таблице 1 приведены данные продаж продовольственных товаров в магазине. Разработать модель продаж и провести прогнозирование объёма продаж на первые 6 месяцев 1996 года. Выводы обосновать.

Решение:

Объём продаж продовольственных товаров с 1 января 1990 г. в относительных единицах.

Дата	t	t^2	y_t	$y_t t$	$\hat{y}_t$	$\varepsilon_t = y_t - \hat{y}_t$	$(\varepsilon_t)^2$	$(\varepsilon_t)^3$	$(\varepsilon_t)^4$	ε_t / y_t
1/1/93	1	1	192	192	203,09	-11,09	122,893	-1362,357	15102,704	0,058
1/2/93	2	4	195	390	204,89	-9,89	97,794	-967,090	9563,631	0,051
1/3/93	3	9	213	639	206,69	6,31	39,785	250,949	1582,874	0,030
14/93	4	16	201	804	208,50	-7,50	56,187	-421,166	3156,978	0,037
1/5/93	5	25	194	970	210,30	-16,30	265,663	-4330,077	70576,620	0,084
1/6/93	6	36	229	1374	212,10	16,90	285,525	4824,649	81524,409	0,074
1/7/93	7	49	231	1617	213,91	17,09	292,209	4995,053	85386,017	0,074
1/8/93	8	64	266	2128	215,71	50,29	2529,160	127193,378	6396651,163	0,189
1/9/93	9	81	214	1926	217,51	-3,51	12,338	-43,340	152,236	0,016
1/10/93	10	100	192	1920	219,32	-27,32	746,162	-20382,137	556757,760	0,142
1/11/93	11	121	181	1991	221,12	-40,12	1609,560	-64574,484	2590684,867	0,222
1/12/93	12	144	217	2604	222,92	-5,92	35,078	-207,758	1230,483	0,027
1/1/94	13	169	202	2626	224,73	-22,73	516,473	-11737,400	266744,740	0,113
1/2/94	14	196	205	2870	226,53	-21,53	463,516	-9979,218	214846,684	0,105
1/3/94	15	225	250	3750	228,33	21,67	469,469	10172,085	220400,880	0,087
1/4/94	16	256	235	3760	230,14	4,86	23,657	115,065	559,663	0,021
1/5/94	17	289	242	4114	231,94	10,06	101,214	1018,261	10244,222	0,042
1/6/94	18	324	258	4644	233,74	24,26	588,409	14273,121	346225,127	0,094
1/7/94	19	361	282	5358	235,55	46,45	2157,954	100245,115	4656764,676	0,165
1/8/94	20	400	294	5880	237,35	56,65	3209,270	181806,500	10299414,608	0,193
1/9/94	21	441	249	5229	239,15	9,85	96,965	954,816	9402,127	0,040
1/10/94	22	484	221	4862	240,96	-19,96	398,254	-7947,678	158606,257	0,090
1/11/94	23	529	205	4715	242,76	-37,76	1425,792	-53837,435	2032883,441	0,184
1/12/94	24	576	229	5496	244,56	-15,56	242,208	-3769,485	58664,596	0,068
1/1/95	25	625	222	5550	246,37	-24,37	593,721	-14466,830	352504,381	0,110
1/2/95	26	676	217	5642	248,17	-31,17	971,553	-30283,068	943915,590	0,144
1/3/95	27	729	236	6372	249,97	-13,97	195,248	-2728,219	38121,696	0,059
1/4/95	28	784	243	6804	251,78	-8,78	77,026	-676,020	5933,072	0,036
1/5/95	29	841	259	7511	253,58	5,42	29,378	159,235	863,080	0,021
1/6/95	30	900	275	8250	255,38	19,62	384,819	7548,922	148085,744	0,071
1/7/95	31	961	311	9641	257,19	53,81	2895,887	155837,652	8386160,958	0,173
1/8/95	32	1024	301	9632	258,99	42,01	1764,847	74141,378	3114685,5	0,140
1/9/95	33	1089	259	8547	260,79	-1,79	3,216	-5,767	10,342	0,007
1/10/95	34	1156	247	8398	262,60	-15,60	243,255	-3793,962	59173,062	0,063
1/11/95	35	1225	214	7490	264,40	-50,40	2540,160	-128024,064	6452412,826	0,236

Сумма	630	14910	8181	153696	8181	0	25484,645	323998,623	47588993,0	3,263

Рассчитываем показатели полинома 1 степени $\hat{y}_t = a_0 + a_1 t$ по системе нормальных уравнений.

$$\begin{cases} a_0 n + a_1 \sum t = \sum y_t \\ a_0 \sum t + a_1 \sum t^2 = \sum y_t t \end{cases}$$

$$n = 35; \quad \sum t = 630; \quad \sum t^2 = 14910; \quad \sum y_t = 8181; \quad \sum y_t t = 153696.$$

$$\begin{cases} 35a_0 + 630a_1 = 8181 \\ 630a_0 + 14910a_1 = 153696 \end{cases}$$

Решаем методом Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 35 & 630 \\ 630 & 14910 \end{vmatrix} = 124950; \qquad \Delta_0 = \begin{vmatrix} 8181 & 630 \\ 153696 & 14910 \end{vmatrix} = 25150230;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 35 & 8181 \\ 630 & 153696 \end{vmatrix} = 225330;$$

$$a_0 = \frac{\Delta_0}{\Delta} = \frac{25150230}{124950} = 201,282; \qquad a_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{225330}{124950} = 1,803$$

Получаем следующее линейное уравнение тренда: $\hat{y}_t = 201,282 + 1,803t$.

Рассчитаем по этому уравнению значения $\hat{y}_t$ и разницу $\varepsilon_t = y_t - \hat{y}_t$ между исходными данными и значениями, вычисленными по уравнению тренда. Результаты занесём в таблицу.

Проверяем соответствие распределения случайной компоненты остатков ряда нормальному закону распределения, исследуя значения асимметрии и эксцесса.

Вычисляем выборочные характеристики асимметрии и эксцесса и их ошибки.

Выборочная характеристика асимметрии:

$$\gamma_1 = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_t^3}{\sqrt{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_t^2\right)^3}} = \frac{\frac{1}{35}\cdot 323998,623}{\sqrt{\left(\frac{1}{35}\cdot 25484,645\right)^3}} = 0,471;$$

выборочная характеристика эксцесса:

$$\gamma_2 = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_t^4}{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_t^2\right)^2} - 3 = \frac{\frac{1}{35}\cdot 47588993}{\left(\frac{1}{35}\cdot 25484,645\right)^2} - 3 = -0,435;$$

среднеквадратическая ошибка асимметрии:

$$\sigma_{\gamma_1} = \sqrt{\frac{6(n-2)}{(n+1)(n+3)}} = \sqrt{\frac{6\cdot 33}{36\cdot 38}} = 0,3804; \qquad 1,5\sigma_{\gamma_1} = 0,5707; \quad 2\sigma_{\gamma_1} = 0,7609;$$

среднеквадратическая ошибка эксцесса:

$$\sigma_{\gamma_2} = \sqrt{\frac{24n(n-2)(n-3)}{(n+1)^2(n+3)(n+5)}} = \sqrt{\frac{24\cdot 35\cdot 33\cdot 32}{36^2\cdot 38\cdot 40}} = 0,6710;$$

$1,5\sigma_{\gamma_2} = 1,0066;\ \ 2\sigma_{\gamma_2} = 1,3421.$

Проверяем выполнение неравенств $|\gamma_1| < 1,5\sigma_{\gamma_1}$ и $\left|\gamma_2 + \dfrac{6}{n+1}\right| < 1,5\sigma_{\gamma_2}$:

0,471 < 0,5707 – выполняется;

$\left|-0,435 + \dfrac{6}{36}\right| = |-0,435 + 0,167| = 0,268 < 1,0066$ – выполняется.

Следовательно, гипотеза о нормальном характере распределения случайной компоненты принимается.

Оцениваем точность модели, используя среднюю относительную ошибку аппроксимации ряда.

$$\varepsilon_{отн} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{y_t - \hat{y}}{y_t}\right|\cdot 100\%;\qquad \varepsilon_{отн} = \frac{1}{35}\cdot 3,263\cdot 100\% = 9,32\%.$$

Т.к. ошибка больше 5%, модель не может считаться адекватной исходному ряду наблюдений.

Рассчитаем прогнозируемое значение продаж товара по полученной модели на первые 6 месяцев 1996 года. При прогнозировании будем считать, что модель является достаточно точной.

Для 1-го месяца 1996 года: $t = 37$; $\hat{y}_{37} = 201,282+1,803\cdot 37 = 268,01$.

Для 2-го месяца 1996 года: $t = 38$; $\hat{y}_{38} = 201,282+1,803\cdot 38 = 269,81$.

Для 3-го месяца 1996 года: $t = 39$; $\hat{y}_{39} = 201,282+1,803\cdot 39 = 271,61$.

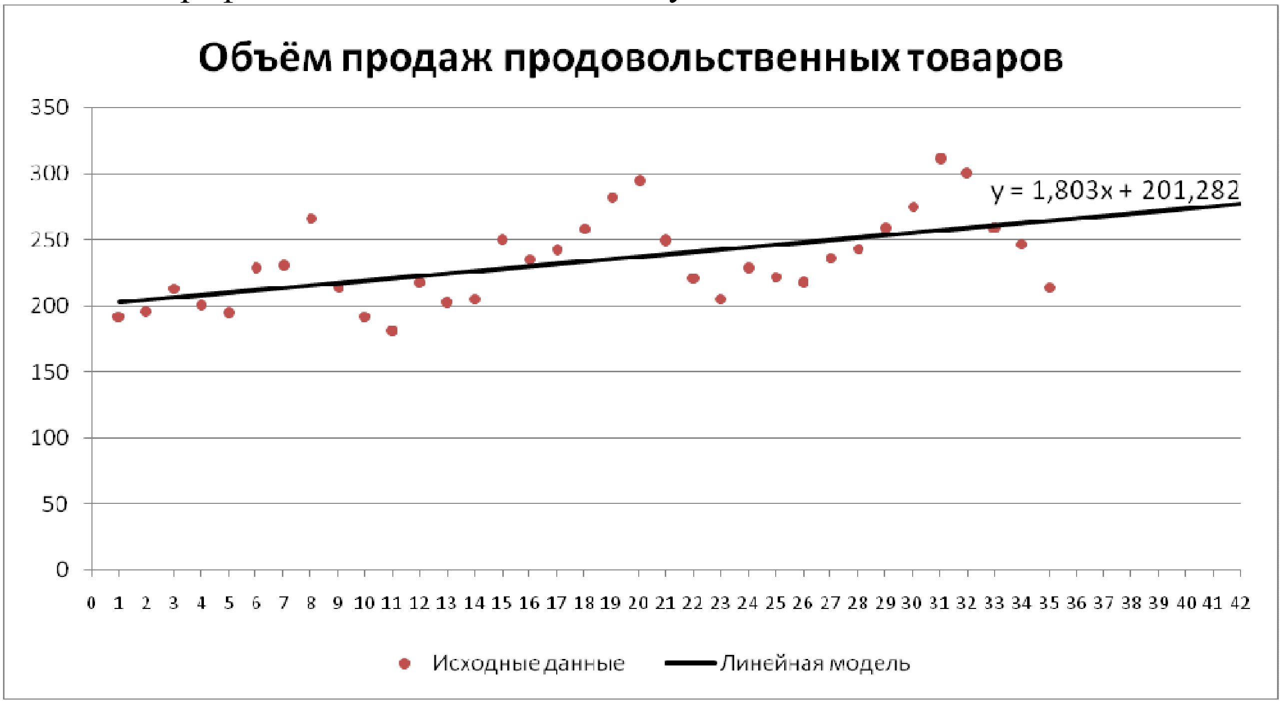
Для 4-го месяца 1996 года: $t = 40$; $\hat{y}_{40} = 201,282+1,803\cdot 40 = 273,42$.

Для 5-го месяца 1996 года: t =41; $\hat{y}_{41}$ = 201,282+1,803·41 = 275,22.

Для 6-го месяца 1996 года: t =42; $\hat{y}_{42}$ = 201,282+1,803·42 = 277,02.

Прогнозные значения равномерно возрастают, в отличие от исходных данных продаж, которые имеют как положительную, так и отрицательную тенденцию в различные моменты рассматриваемого периода.

График исходных данных и полученной линейной модели



Задание 2

Определить возможные стратегии действий форм в условиях инфляции сложившейся рыночной ситуации методами теории игр. В матрице размером 3х3 приведены возможные эффекты от применения различных стратегий, определяющих ценовую политику фирмы: стратегия 1 направлена на снижения цен, стратегия 2 на поддержание существующего уровня цен, стратегия 3 направлена на повышение цен пропорционально уровню инфляции. Выводы обосновать.

$$\begin{pmatrix} 36 & 15 & 24 \\ 65 & 23 & 45 \\ 79 & 46 & 61 \end{pmatrix}$$

Решение

		Возможные стратегии действий фирмы			Минимальный элемент в строке
		1	2	3	
Стратегии действий фирмы	1	36	15	24	15
	2	65	23	45	23
	3	79	46	61	46
Максимальный элемент в столбце		79	46	61	

Вывод: в нашем случае, нижняя и верхняя цены игры совпадают, и их общее значение 46 - называется ценой игры. Эта ситуация возникает при применении игроком А чистой стратегии А3, а игроком В чистой стратегии В2. Совокупность этих чистых стратегий называется решением игры или говорят, что игра обладает седловой точкой**.**

Следовательно, в сложившейся на рынке ситуации целесообразно использовать стратегию, направленную на повышение цен пропорционально уровню инфляции. При этом цена игры составляет 46. Возможная стратегия - целесообразней поддерживать ассортимент на уровне существующих цен.

Задание 3

В таблице представлены статистические данные о расходах на питание различных групп населения, в зависимости от уровня их суммарных доходов в месяц (числа относительные).

Требуется:

1. Построить линейную однофакторную модель зависимости между доходами семьи и расходами на продукты питания;
2. Оценить тесноту связи между доходами семьи и расходами на продукты питания;

3. Рассчитать коэффициенты детерминации, эластичности и бета – коэффициент, пояснить их экономический смысл, оценить точность модели.

X – доходы семьи,
Y – расходы на продукты питания

X	2,0	3,2	3,4	3,6	4,5	5,1	5,6	5,8	6,4	7,5
Y	1,1	1,3	1,4	1,45	1,7	1,8	2,1	2,2	3	3,4

Решение

1.Рассмотрим однофакторную линейную модель зависимости расходов на питание (y) от величины душевого дохода семей (x_i). Она выражается линейной функцией вида $\hat{y} = a_0 + a_1 x_1$, параметры которой a_1 и a_0 находятся в результате решения системы нормальных уравнений. Система нормальных уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} na_0 + \left(\sum x_1\right)a_1 = \sum y \\ \left(\sum x_1\right)a_0 + \left(\sum x_1^2\right)a_1 = \sum yx_1 \end{cases}$$

Расчёты проведём в таблице 1.

Таблица 1.

	A	B	C	D	E
1	№	Y	X	Y*X	X*X
2	1	1,1	2,0	2,20	4,00
3	2	1,3	3,2	4,16	10,24
4	3	1,4	3,4	4,76	11,56
5	4	1,45	3,6	5,22	12,96
6	5	1,7	4,5	7,65	20,25
7	6	1,8	5,1	9,18	26,01
8	7	2,1	5,6	11,76	31,36
9	8	2,2	5,8	12,76	33,64
10	9	3	6,4	19,20	40,96
11	10	3,4	7,5	25,50	56,25
12	**Сумма**	**19,45**	**47,10**	**102,39**	**247,23**

Используя данные таблицы 1, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 10a_0 + 47{,}1a_1 = 19{,}45 \\ 47{,}1a_0 + 247{,}23a_1 = 102{,}39 \end{cases}$$

Решение системы уравнений можно получить с использованием правила Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 10 & 47{,}1 \\ 47{,}1 & 247{,}23 \end{vmatrix} = 10 \cdot 247{,}23 - 47{,}1 \cdot 47{,}1 = 253{,}89,$$

$$\Delta a_0 = \begin{vmatrix} 19{,}45 & 47{,}1 \\ 102{,}39 & 247{,}23 \end{vmatrix} = 19{,}45 \cdot 247{,}23 - 102{,}39 \cdot 47{,}1 = -13{,}95$$

$$\Delta a_1 = \begin{vmatrix} 10 & 19{,}45 \\ 47{,}1 & 102{,}39 \end{vmatrix} = 10 \cdot 102{,}39 - 47{,}1 \cdot 19{,}45 = 107{,}81$$

$$a_0 = \frac{\Delta a_0}{\Delta} = \frac{-13{,}95}{253{,}89} = -0{,}055$$

$$a_1 = \frac{\Delta a_1}{\Delta} = \frac{107{,}81}{253{,}89} = 0{,}425$$

Таким образом, модель примет вид:

$$y = -0{,}055 + 0{,}425 x_1 .$$

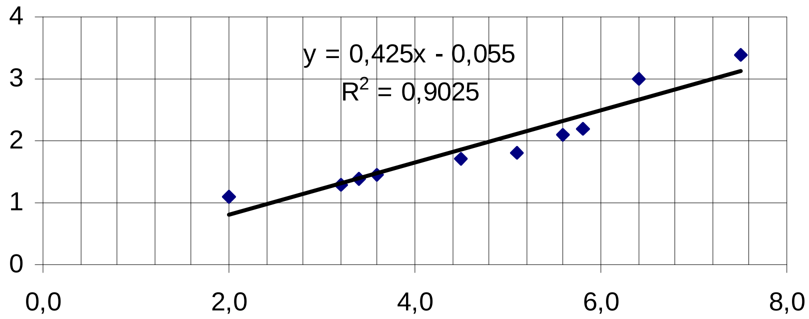


Рис.1 – Эконометрическая модель

Полученное уравнение называется уравнением регрессии, коэффициент a_1 - коэффициентом регрессии. Направление связи между y и x_1 определяет знак коэффициента регрессии a_1. В нашем случае данная связь является прямой.

2. Теснота связи определяется коэффициентом корреляции (парным).

$$r_{yx1} = \sqrt{1 - \frac{s_{yx1}^2}{s_y^2}},$$

где s_y - средняя квадратичная ошибка выборки y из таблицы 2:

$$s_y = \sqrt{\frac{\sum (y - \bar{y})^2}{n}},$$

$\bar{y}$ – выборочная средняя значений y,

s_{yx} – средняя квадратичная ошибка для числа степеней свободы $n-2$.

$$s_{yx1} = \sqrt{\frac{\sum \left(y - \hat{y} \right)^2}{n-2}},$$

где $\hat{y}$ - соответствующее значение расходов на питание, вычисленное по модели.

Чем ближе значение коэффициента корреляции к единице, тем теснее корреляционная связь.

Для этого нужна новая таблица для промежуточных расчётов.

Таблица 2

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	№	Y	X	Y*X	X*X	$(y-\bar{y})^2$	$\hat{y}$	$(y-\hat{y})^2$
2	1	1,1	2,0	2,20	4,00	0,714025	0,795	0,09303
3	2	1,3	3,2	4,16	10,24	0,416025	1,305	0,00003
4	3	1,4	3,4	4,76	11,56	0,297025	1,390	0,00010
5	4	1,45	3,6	5,22	12,96	0,245025	1,475	0,00063
6	5	1,7	4,5	7,65	20,25	0,060025	1,858	0,02481
7	6	1,8	5,1	9,18	26,01	0,021025	2,113	0,09766
8	7	2,1	5,6	11,76	31,36	0,024025	2,325	0,05062
9	8	2,2	5,8	12,76	33,64	0,065025	2,410	0,04410
10	9	3	6,4	19,20	40,96	1,113025	2,665	0,11223
11	10	3,4	7,5	25,50	56,25	2,117025	3,133	0,07156
12	**Сумма**	**19,45**	**47,10**	**102,39**	**247,23**	**5,07225**		**0,49474**
13	**Среднее**	**1,945**						

Тогда,

$$s_y = \sqrt{\frac{\sum (y-\bar{y})^2}{n}} = \sqrt{\frac{5{,}07225}{10}} = 0{,}712, \quad s_{yx1} = \sqrt{\frac{\sum \left(y-\hat{y}\right)^2}{n-2}} = \sqrt{\frac{0{,}49474}{8}} = 0{,}249.$$

$$r_{yx1} = \sqrt{1-\frac{s_{yx1}^2}{s_y^2}} = \sqrt{1-\frac{0{,}249^2}{0{,}712^2}} = 0{,}95.$$

Полученное значение коэффициента корреляции свидетельствует, что связь между расходами на питание и душевым доходом очень тесная.

3.Величина r^2 называется коэффициентом детерминации и показывает долю изменения (вариации) результативного признака под действием факторного признака. В нашем случае $r^2 = 0{,}95^2 = 0{,}9025$, а это означает, что фактором душевого дохода можно объяснить почти 90,25% изменения расходов на питание.

Коэффициенты регрессии (в рассматриваемом случае это коэффициент a_1) нельзя использовать для непосредственной оценки влияния факторов на результативный признак из – за различия единиц измерения исследуемых показателей. Для этих целей вычисляются коэффициенты эластичности и бета – коэффициент.

Коэффициент эластичности для рассматриваемой модели парной регрессии рассчитывается по формуле:

$$Э_{yx1} = \frac{a_1 \bar{x}_1}{\bar{y}}.$$

Он показывает, на сколько процентов изменяется результативный признак y при изменении факторного признака x_1 на один процент.

$$Э_{yx1} = \frac{0{,}425 \cdot 4{,}71}{1{,}945} = 1{,}029.$$

Это означает, что при увеличении душевого дохода на 1% расходы на питание увеличатся на 1,029%.

Бета – коэффициент в нашем случае задаётся формулой:

$$\beta_{yx1} = \frac{a_1 \cdot s_x}{s_y},$$

где s_x и s_y - средние квадратичные ошибки выборки величин x и y.

Таблица 3

	A	B	C	D
1	№	Y	X	$(x-\bar{x})^2$
2	1	1,1	2,0	7,34
3	2	1,3	3,2	2,28
4	3	1,4	3,4	1,72
5	4	1,45	3,6	1,23
6	5	1,7	4,5	0,04
7	6	1,8	5,1	0,15
8	7	2,1	5,6	0,79
9	8	2,2	5,8	1,19
10	9	3	6,4	2,86
11	10	3,4	7,5	7,78
12	**Сумма**	**19,45**	**47,10**	**25,39**
13	**Среднее**	**1,945**		

Найдём $s_x = \frac{\sum (x-\bar{x})^2}{n} = \frac{25{,}39}{10} = 2{,}539.$

Бета - коэффициент показывает, какую часть дисперсии результативного признака составляет дисперсия фактора.

$$\beta_{yx1} = \frac{0{,}425 \cdot 2{,}539}{0{,}712} = 1{,}52.$$

Это говорит о высокой степени вклада фактора в результативный признак.

Качество эконометрических моделей может быть установлено на основе анализа остаточной последовательности. Остаточная последовательность проверяется на выполнение свойств случайной компоненты временного эконометрического ряда: близость к нулю выборочного среднего, случайный характер отклонений, отсутствие автокорреляции и нормальность закона распределения.

О качестве моделей регрессии можно судить также по значениям коэффициента корреляции и коэффициента детерминации для однофакторной модели. Чем ближе абсолютные величины указанных коэффициентов к 1, тем теснее связь между изучаемым признаком и выбранными факторами и, следовательно, с тем большей уверенностью можно судить об адекватности построенной модели, включающей в себя наиболее влияющие факторы.

Проверка значимости модели проводится с использованием F – критерия Фишера, расчётное значение которого находится как отношение дисперсии исходного ряда наблюдений изучаемого показателя и несмещённой оценки дисперсии остаточной последовательности для данной модели. Если расчётное значение этого критерия со степенями свободы $f_1 = n-1$ и $f_2 = n-m-1$, где n - количество наблюдений, m – число включённых в модель факторов, больше табличного значения критерия Фишера при заданном уровне значимости, то модель признаётся значимой.

$$F_T = \frac{D_{\text{факторная}}}{D_{\text{ост}}}$$

$$D_{\text{факторная}} = \frac{\sum(\hat{y} - \bar{y})^2}{m}$$

Таблица 4

	A	B	C	D
1	№	Y	$\hat{y}$	$(\hat{y}-\bar{y})^2$
2	1	1,1	0,795	1,32
3	2	1,3	1,305	0,41
4	3	1,4	1,390	0,31
5	4	1,45	1,475	0,22
6	5	1,7	1,858	0,01
7	6	1,8	2,113	0,03
8	7	2,1	2,325	0,14
9	8	2,2	2,410	0,22
10	9	3	2,665	0,52
11	10	3,4	3,133	1,41
12	**Сумма**	**19,45**		**4,59**
13	**Среднее**	**1,945**		

$$D_{\text{факторная}} = \frac{4{,}59}{1} = 4{,}59$$

$$D_{\text{ост}} = \frac{\sum(y_i - \hat{y})^2}{n-m-1}$$

$$D_{ост} = \frac{0{,}49474}{10-1-1} = 0{,}062\,.$$

Тогда, $F=\frac{4,56}{0,062}=73,55$.

$F_{кр.}=5,32$ - найдено по таблице.

Так как $F_{кр.}<F$, то полученное уравнение регрессии принимается статистически значимым.

Для оценки точности моделей также используется средняя относительная ошибка аппроксимации.

$$A=\frac{1}{n}\sum\left|\frac{\left(y-\hat{y}\right)^2}{y}\right|\cdot 100\%$$

$$A=\frac{1}{10}\cdot 0,494\cdot 100=4,94\%$$

Полученное значение не превышает 12-15%, что свидетельствует о несущественном отклонении расчётных данных от фактических, по которым построена эконометрическая модель.