

Тема 2.3. Применение линейной алгебры в экономике

Задача 1. Плановый межотраслевой баланс.

Общественное производство состоит из восьми отраслей. Задана матрица коэффициентов прямых затрат:

0,01	0	0,12	0,03	0,07	0,14	0,12	0,01
0,22	0,08	0,06	0,13	0,14	0	0,18	0,03
0,03	0,09	0,14	0	0,02	0,05	0	0,04
0	0,08	0,07	0,05	0,03	0,09	0,08	0,04
0,08	0,04	0	0,14	0,01	0,03	0,08	0,09
0,03	0	0,02	0,13	0,12	0,4	0,03	0
0,19	0,3	0,15	0,09	0	0,09	0,14	0,06
0	0,04	0,07	0,08	0,17	0,04	0,18	0

Задание 1. По заданной конечной продукции рассчитать валовую.

Отрасли	Конечная продукция
1	1831,2
2	243,4
3	941,8
4	2248,2
5	751,1
6	643,2
7	1725,0
8	2540,2

Задание 2. В таблице заданы валовые продукты отраслей.

Отрасли	Валовой продукт
1	3600
2	4500
3	1800
4	2300
5	6700
6	4300
7	5600
8	4670

Рассчитать конечные продукты отраслей.

Для этого в системе уравнений все величины X_1, \dots, X_8 необходимо заменить на значения из приведенной выше таблицы, а численные значения конечной продукции – на символы y_1, \dots, y_8 . Решение полученной системы уравнений дает значения конечных продуктов отраслей.

Решение.

Задание 1. По заданной конечной продукции Y рассчитаем валовую продукцию X . Используем известное соотношение $X = (E - A)^{-1}Y$, где матрица A задана в условии, вектор Y также дан, E - единичная матрица. Расчеты будем вести в таблице Excel, так как размерность матриц большая.

Вносим данные в таблицу:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1											
2											
3											
4		0,01	0	0,12	0,03	0,07	0,14	0,12	0,01		1831,2
5		0,22	0,08	0,06	0,13	0,14	0	0,18	0,03		243,4
6		0,03	0,09	0,14	0	0,02	0,05	0	0,04		941,8
7		0	0,08	0,07	0,05	0,03	0,09	0,08	0,04		2248,2
8		0,08	0,04	0	0,14	0,01	0,03	0,08	0,09		751,1
9		0,03	0	0,02	0,13	0,12	0,4	0,03	0		643,2
10		0,19	0,3	0,15	0,09	0	0,09	0,14	0,06		1725
11		0	0,04	0,07	0,08	0,17	0,04	0,18	0		2540,2
12											
13											

Далее создаем единичную матрицу и вычисляем $E - A$

Матрица E							
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	1

Матрица E-A							
0,99	0	-0,12	-0,03	-0,07	-0,14	-0,12	-0,01
-0,22	0,92	-0,06	-0,13	-0,14	0	-0,18	-0,03
-0,03	-0,09	0,86	0	-0,02	-0,05	0	-0,04
0	-0,08	-0,07	0,95	-0,03	-0,09	-0,08	-0,04
-0,08	-0,04	0	-0,14	0,99	-0,03	-0,08	-0,09
-0,03	0	-0,02	-0,13	-0,12	0,6	-0,03	0
-0,19	-0,3	-0,15	-0,09	0	-0,09	0,86	-0,06
0	-0,04	-0,07	-0,08	-0,17	-0,04	-0,18	1

Осталось вычислить обратную матрицу $B = (E - A)^{-1}$ (используем встроенную функцию МОБР):

Матрица B							
1,112	0,121	0,229	0,149	0,157	0,348	0,233	0,058
0,404	1,292	0,259	0,313	0,276	0,246	0,414	0,115
0,100	0,159	1,218	0,073	0,087	0,157	0,082	0,070
0,103	0,191	0,170	1,160	0,118	0,253	0,199	0,083
0,174	0,156	0,108	0,245	1,099	0,182	0,216	0,132
0,138	0,111	0,130	0,327	0,266	1,802	0,173	0,057
0,439	0,551	0,399	0,326	0,204	0,421	1,436	0,154
0,146	0,208	0,205	0,224	0,261	0,220	0,340	1,069

Теперь вычисляем вектор валовой продукции $X = (E - A)^{-1}Y = B \cdot Y$ (используем встроенную функцию МУМНОЖ):

Вектор X	Вектор X
=МУМНОЖ(B34:I41;K4:K11)	3508,009
=МУМНОЖ(B34:I41;K4:K11)	3374,752
=МУМНОЖ(B34:I41;K4:K11)	2019,791
=МУМНОЖ(B34:I41;K4:K11)	3807,639
=МУМНОЖ(B34:I41;K4:K11)	2660,569
=МУМНОЖ(B34:I41;K4:K11)	2938,878
=МУМНОЖ(B34:I41;K4:K11)	5340,985
=МУМНОЖ(B34:I41;K4:K11)	4652,416

получаем:

Итак, нашли валовую продукцию по отраслям,

Вектор X

3508,009
3374,752
2019,791
3807,639
2660,569
2938,878
5340,985
4652,416

Задание 2. В таблице заданы валовые продукты отраслей, рассчитаем по ним конечные продукты отраслей по формуле $Y = (E - A)X$. Все матрицы уже подсчитаны, осталось только подставить в формулу:

Вектор Y	Вектор X	Вектор Y
=МУМНОЖ(B24:I31;K14:K21)	3600	1489,3
=МУМНОЖ(B24:I31;K14:K21)	4500	854,9
=МУМНОЖ(B24:I31;K14:K21)	1800	499,2
=МУМНОЖ(B24:I31;K14:K21)	2300	476,2
=МУМНОЖ(B24:I31;K14:K21)	6700	4845,7
=МУМНОЖ(B24:I31;K14:K21)	4300	1165
=МУМНОЖ(B24:I31;K14:K21)	5600	1637,8
=МУМНОЖ(B24:I31;K14:K21)	4670	1861

получаем:

Искомый вектор конечной продукции по отраслям:

Вектор Y
1489,3
854,9
499,2
476,2
4845,7
1165
1637,8
1861

Задача 5. Разработка межпродуктового баланса производства и распределения продукции предприятия.

В трех цехах приборостроительного завода изготавливаются датчики, приборы и их узлы, основная часть которых идет на внутреннее потребление, остальная является конечным продуктом и поставляется внешним приборостроительным и машиностроительным организациям, а также в ремонтные мастерские.

Требуется составить межпродуктовый баланс производства и распределения продукции, если известны коэффициенты прямых затрат и конечный продукт.

Исходные данные:

Производящие цехи	Потребляющие цехи (коэф. прямых затрат)			Конечная продукция
	№1	№2	№3	
№1	0,15	0,10	0,30	100
№2	0,25	0,15	0,25	280
№3	0,30	0,25	0	320

Решение. Сначала найдем вектор валовой продукции по известной матрице прямых затрат A и вектору конечной продукции Y по формуле: $X = (E - A)^{-1}Y$.

Вносим данные в таблицу:

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2							
3							
4							
5		A				Y	
6		0,15	0,1	0,3		100	
7		0,25	0,15	0,25		280	
8		0,3	0,25	0		320	
9							

Далее создаем единичную матрицу и вычисляем $E - A$:

E

1	0	0
0	1	0
0	0	1

E-A

0,85	-0,1	-0,3
-0,25	0,85	-0,25
-0,3	-0,25	1

Осталось вычислить обратную матрицу $B = (E - A)^{-1}$ (используем встроенную функцию МОБР):

B

1,454	0,323	0,517
0,600	1,403	0,531
0,586	0,448	1,288

Теперь вычисляем вектор валовой продукции $X = (E - A)^{-1}Y = B \cdot Y$ (используем встроенную функцию МУМНОЖ):

X=B*Y

401,292
622,756
596,077

Итак, нашли валовую продукцию по отраслям. Теперь можно вычислять числовые значения распределения продукции внутри предприятия и заполнять таблицу межпродуктового баланса. Используем основную формулу:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}, \quad i, j = 1, 2, 3, \text{ откуда } x_{ij} = a_{ij} \cdot x_j.$$

Получаем искомую таблицу:

Производящие	Потребляющие цеха	Конечная	Валовая
--------------	-------------------	----------	---------

Контрольная работа выполнена на сайте www.MatBuro.ru
©МатБюро. Решение задач по математике, статистике, теории вероятностей

цеха	1	2	3	продукция	продукция
1	60,194	62,276	178,823	100,000	401,292
2	100,323	93,413	149,019	280,000	622,756
3	120,388	155,689	0,000	320,000	596,077