Вариант 1

Задача 1. Найти область решения неравенств

$x_1 - 1 \ge 0,$

$x_2 - 2 \ge 0,$

$x_1 + x_2 - 3 \ge 0,$

$-6x_1 - 7x_2 + 42 \ge 0.$

Решение. Построим на плоскости $x_1 O x_2$ область решений неравенств

$x_1 - 1 \ge 0,$

$x_2 - 2 \ge 0,$

$x_1 + x_2 - 3 \ge 0,$

$-6x_1 - 7x_2 + 42 \ge 0.$

Строим прямые:

(I) $x_1 - 1 = 0,$ точки (1, 0), (1, 1).

(II) $x_2 - 2 = 0,$ точки (0, 2), (2, 2).

(III) $x_1 + x_2 - 3 = 0,$ точки (3, 0), (0, 3).

(IV) $-6x_1 - 7x_2 + 42 = 0,$ точки (7, 0), (0, 6).

Штриховкой выделяем нужные полуплоскости, соответствующие знакам неравенств.

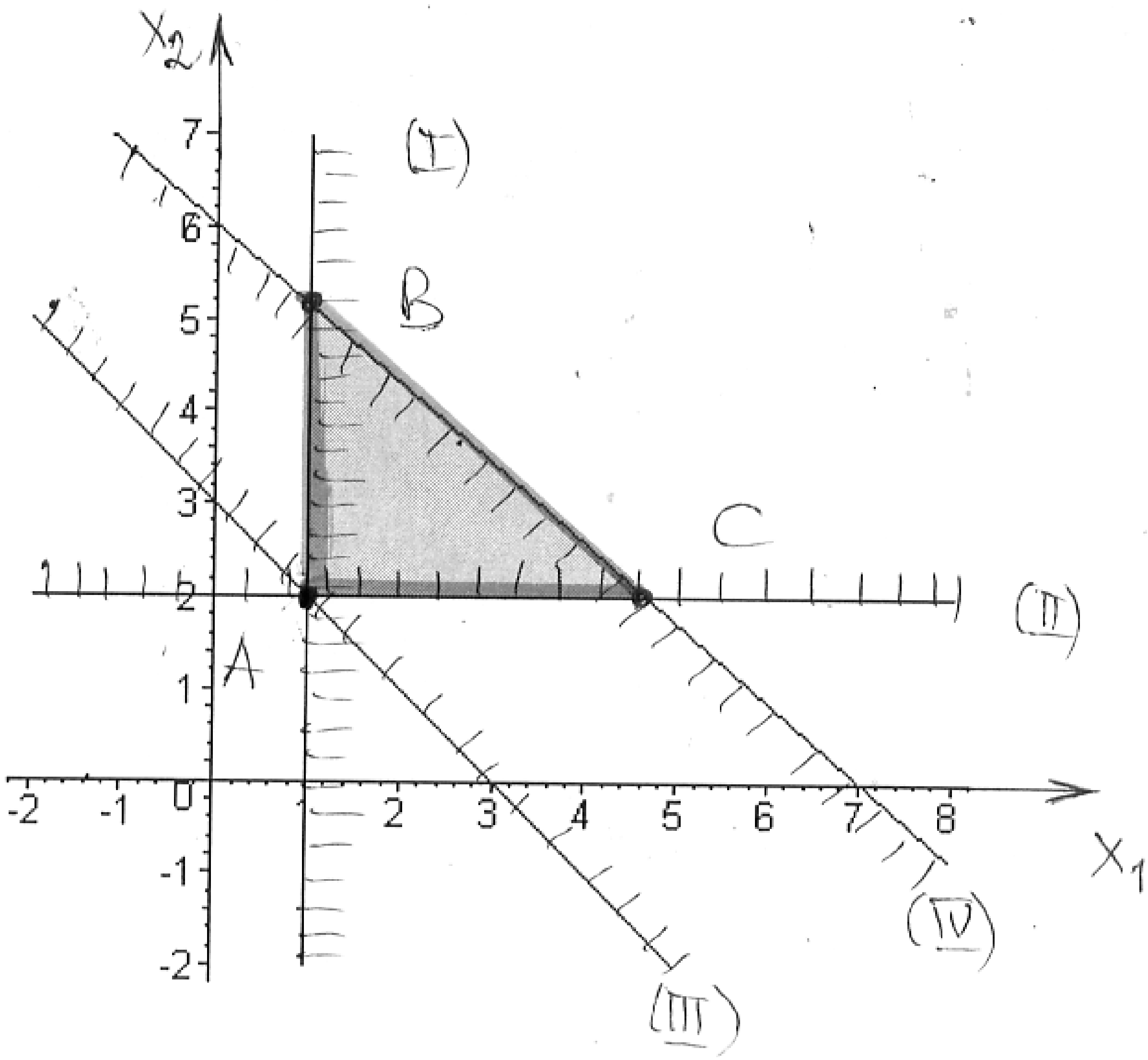
Берем неравенство $x_1 - 1 \ge 0$. Рассмотрим точку $(0;0)$ (начало координат). Подставляем в неравенство и получаем неверное соотношение $-1 > 0$. Значит, заштриховываем ту полуплоскость, в которой не находится точка $(0;0)$.

Берем неравенство $x_2 - 2 \ge 0$. Рассмотрим точку $(0;0)$ (начало координат). Подставляем в неравенство и получаем неверное соотношение $-2 > 0$. Значит, заштриховываем ту полуплоскость, в которой не находится точка $(0;0)$.

Берем неравенство $x_1 + x_2 - 3 \ge 0$. Рассмотрим точку $(0;0)$ (начало координат). Подставляем в неравенство и получаем неверное соотношение $-3 > 0$. Значит, заштриховываем ту полуплоскость, в которой не находится точка $(0;0)$.

Берем неравенство $-6x_1 - 7x_2 + 42 \ge 0$. Рассмотрим точку $(0;0)$ (начало координат). Подставляем в неравенство и получаем верное соотношение $42 > 0$. Значит, заштриховываем ту полуплоскость, в которой находится точка $(0;0)$.

Получаем ограниченную выпуклую область ABC в первой четверти, она и есть решение системы неравенств.



Задача 2. Найти наибольшее значение функции $Z = x_1 + 2x_2$ при ограничениях

$x_1 + 4x_2 \geq 4,$

$x_1 + x_2 \leq 6,$

$x_2 \leq 2.$

Решение. Построим на плоскости x_1Ox_2 область допустимых решений задачи, ограниченную неравенствами

$x_1 + 4x_2 \geq 4,$

$x_1 + x_2 \leq 6,$

$x_2 \leq 2.$

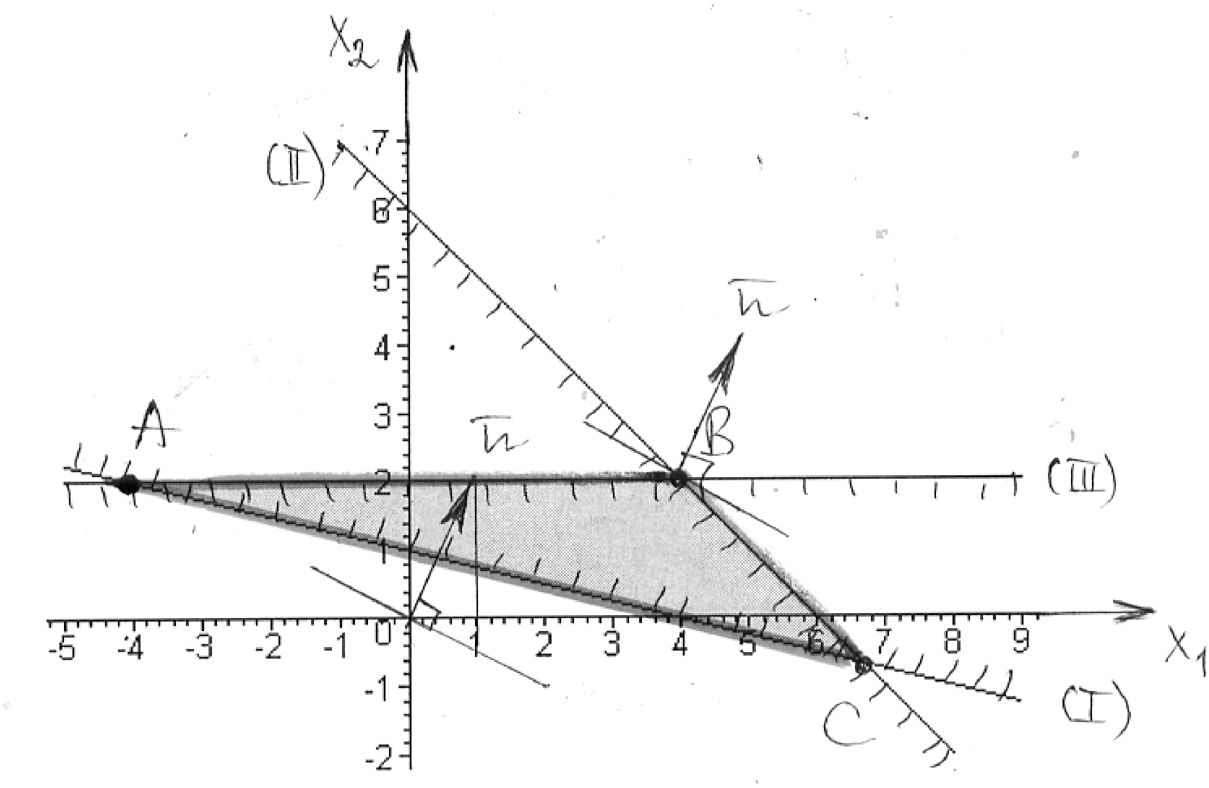
Строим прямые:

(I) $x_1 + 4x_2 = 4,$ точки (4, 0), (0, 1).

(II) $x_1 + x_2 = 6,$ точки (6, 0), (0, 6).

(III) $x_2 = 2,$ точки (0, 2), (2, 2).

Штриховкой выделяем нужные полуплоскости, соответствующие знакам неравенств. Находим область, в которой пересекаются все штриховки. Получаем неограниченную выпуклую область ABC.



Строим линию уровня целевой функции $x_1+2x_2=0$ и вектор градиента (наискорейшего возрастания функции) $\overline{n}=(1,2)$. Двигаем линию уровня параллельно себе по направлению градиента (см. рисунок), пока не выйдем из области.

Видно, что это произойдет в точке $B(4;2)$, в ней функция принимает максимальное значение $Z_{\max}=Z(B)=x_1+2x_2=4+2\cdot 2=8$.

Задача 3. На двух складах А и В находится 90 т горючего. Перевозка одной тонный горючего со склада А в пункты 1, 2, 3 стоит 1, 3, 5 единиц а перевозка одной тонны со склада В в те же пункты – соответственно, 2, 5 и 4 ед. В каждый пункт можно доставить одинаковое количество горючего. Составить план перевозок, при котором транспортные расходы будут минимальны.

Решение. Составим исходную таблицу, обозначая пункты за В, склады за А.

Поставщик	Потребитель			Запасы груза
	B1	B2	B3	
A1	1 **0**	3 **0**	5 **0**	45
A2	2	5	4	45

	0	**0**	**0**	
Потребность	30	30	30	

Найдем опорный план по правилу минимального тарифа.
Находим незанятую клетку с минимальным тарифом: (1,1). Помещаем туда меньшее из чисел 45 и 30. Находим незанятую клетку с минимальным тарифом: (1,2). Помещаем туда меньшее из чисел 15 и 30. Находим незанятую клетку с минимальным тарифом: (2,3). Помещаем туда меньшее из чисел 45 и 30. Находим незанятую клетку с минимальным тарифом: (2,2). Помещаем туда меньшее из чисел 15 и 15.

Поставщик	Потребитель			Запасы груза
	B1	B2	B3	
A1	1 **30**	3 **15**	5	45
A2	2	5 **15**	4 **30**	45
Потребность	30	30	30	

Целевая функция F = 30*1+15*3+15*5+30*4=**270**

Проверяем план на оптимальность. Полагая потенциал $U_1=0$, определяем остальные потенциалы из соотношения $U_i+V_j=C_{i,j}$, просматривая все занятые клетки. Потенциалы:
$U_1=0$
$V_1=C_{1,1}-U_1= 1$
$V_2=C_{1,2}-U_1= 3$
$U_2=C_{2,2}-V_2=2$
$V_3=C_{2,3}-U_2= 2$

Определяем значения оценок $S_{i,j}=C_{i,j}-(U_i+V_j)$ для всех свободных клеток:
$S_{1,3} = C_{1,3} - (U_1 + V_3) = 3$.
$S_{2,1} = C_{2,1} - (U_2 + V_1) = -1$.

Выбираем клетку (2,1) с минимальной оценкой -1. Строим для нее цикл, помечая клетки цикла знаками "плюс" и "минус".

Поставщик	Потребитель			Запасы груза
	B1	B2	B3	
A1	- 1 **30**	+ 3 **15**	5	45
A2	+ 2	- 5 **15**	4 **30**	45
Потребность	30	30	30	

Перемещаем по циклу груз величиной в 15 единиц, прибавляя эту величину к грузу в клетках со знаком "плюс" и отнимая ее от груза в клетках со знаком "минус".
В результате перемещения по циклу получим новый план:

Поставщик	Потребитель			Запасы груза
	B1	B2	B3	
A1	1 **15**	3 **30**	5	45
A2	2 **15**	5	4 **30**	45
Потребность	30	30	30	

Целевая функция F= 15*1+30*3+15*2+30*4= 255.

Проверяем план на оптимальность. Полагая потенциал $U_1=0$, определяем остальные потенциалы из соотношения $U_i+V_j=C_{i,j}$, просматривая все занятые клетки. Потенциалы:
$U_1=0$
$V_1=C_{1,1}-U_1= 1$
$V_2=C_{1,2}-U_1= 3$
$U_2=C_{2,1}-V_1=1$
$V_3=C_{2,3}-U_2= 3$

Определяем значения оценок $S_{i,j}=C_{i,j}-(U_i+V_j)$ для всех свободных клеток:
$S_{1,3} = C_{1,3} - (U_1 + V_3) = 2.$
$S_{2,2} = C_{2,2} - (U_2 + V_2) = 1.$

Так как все оценки $S_{i,j}>=0$, то полученный план является оптимальным. Задача решения. План доставки следующий:

Из склада А в пункт 1 – 15 единиц, в пункт 2 – 30 единиц.

Из склада В в пункт 1 – 15 единиц, в пункт 3 – 30 единиц.

Минимальная стоимость доставки 255.