

## Контрольная по высшей математике за 1 курс

1. Найдите производные от данных функций:

а)  $y = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt[3]{x^3 + 1}$ ,  $y'(0)$ ;

б)  $y = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x + x^2 - \frac{\pi}{2} x$ ,  $y'(\frac{\pi}{4})$ ;

в)  $y = \left( \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{3-x}{x+2}} \right) \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}$ ,  $y'(0)$ .

**Решение.**

а)  $y = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt[3]{x^3 + 1}$ ;

Т.к.  $\sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}}$ ,  $\sqrt[3]{u} = u^{\frac{1}{3}}$ , то воспользуемся формулой из таблицы производных:

$$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$$

$$\begin{aligned} y' &= (\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt[3]{x^3 + 1})' = \left| \begin{array}{l} \text{по правилу производной суммы:} \\ (u+v)' = u' + v' \end{array} \right| = \\ &= (\sqrt{x^2 + 1})' + (\sqrt[3]{x^3 + 1})' = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x^2 + 1} = (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}; \\ \sqrt[3]{x^3 + 1} = (x^3 + 1)^{\frac{1}{3}} \end{array} \right| = \left( (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \right)' + \left( (x^3 + 1)^{\frac{1}{3}} \right)' = \\ &= \left| (u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \right| = \frac{1}{2} (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}-1} \cdot (x^2 + 1)' + \frac{1}{3} (x^3 + 1)^{\frac{1}{3}-1} \cdot (x^3 + 1)' = \end{aligned}$$

$$= \left| \begin{array}{l} (x^2 + 1)' = 2x; \\ (x^3 + 1)' = 3x^2, \text{ т.к.} \\ C' = 0, C - \text{const}; \\ (x^2)' = 2x; (x^3)' = 3x^2 \end{array} \right| = \frac{1}{2} \cdot (x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x + \frac{1}{3} \cdot (x^3 + 1)^{-\frac{2}{3}} \cdot 3x^2 =$$

$$\left| \begin{array}{l} \text{по формуле:} \\ x^{\frac{-m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x^m}} \\ \text{перейдем к корням} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} + \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^2 + 1)^2}} \quad (\text{первую дробь сократили на 2, вторую на 3}).$$

$$y'(0) = \frac{0}{\sqrt{0^2 + 1}} + \frac{0^2}{\sqrt[3]{(0^2 + 1)^2}} = 0.$$

$$б) y = \frac{1}{3}tg^3x + tgx + x^2 - \frac{\pi}{2}x$$

$$y' = \left( \frac{1}{3}tg^3x + tgx + x^2 - \frac{\pi}{2}x \right)' = \left. \begin{array}{l} \text{по правилу производной суммы:} \\ (u+v)' = u' + v'; \\ (kx)' = k \cdot x', k - \text{коэффициент} \end{array} \right|$$

$$= \frac{1}{3}(tg^3x)' + (tgx)' + (x^2)' - \frac{\pi}{2}(x)' =$$

$$= | (u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' - \text{производная степени, т.е. } (u^3)' = 3 \cdot u^2 \cdot u';$$

$$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2x} \text{ и } x' = 1 - \text{по таблице производных } | =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot tg^2x \cdot (tgx)' - (tgx)' + 2x - \frac{\pi}{2} = tg^2x \cdot \frac{1}{\cos^2x} - \frac{1}{\cos^2x} + 2x - \frac{\pi}{2} =$$

$$= \frac{tg^2x - 1}{\cos^2x} + 2x - \frac{\pi}{2}.$$

$$y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{tg^2\frac{\pi}{4} - 1}{\cos^2\frac{\pi}{4}} + 2 \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = 0.$$

$$в) y = \left( \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{3-x}{x+2}} \right) \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Это сложная функция, ее производную найдем по формуле:  $(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$ ,

где

$$u = \sqrt{\frac{3-x}{x+2}}$$

$$y' = \sqrt{\frac{3}{2}} \left( \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{3-x}{x+2}} \right)' = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{1 + \left( \sqrt{\frac{3-x}{x+2}} \right)^2} \cdot \left( \sqrt{\frac{3-x}{x+2}} \right)'$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{по таблице производных:} \\ (\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u', \text{ где } u = \frac{3-x}{x+2} \end{array} \right| = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{3-x}{x+2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{3-x}{x+2}}} \cdot \left( \frac{3-x}{x+2} \right)' =$$

$$\left| \begin{array}{l} \text{по правилу дифференцирования дроби:} \\ \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \text{ найдем } \left(\frac{3-x}{x-2}\right)' \\ = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{x+2+3-x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3-x}} \cdot \frac{(3-x)'(x+2) - (3-x)(x+2)'}{(x+2)^2} = \end{array} \right| =$$

$$\left| \begin{array}{l} \text{по таблице производных:} \\ (kx+b)' = k, \text{ тогда} \\ (3-x)' = -1; (x-2)' = 1 \end{array} \right| = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{x+2}{5} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3-x}} \cdot \frac{-(x+2) - (3-x) \cdot 1}{(x+2)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{x+2}{5} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3-x}} \cdot \frac{-x-2-3+x}{(x+2)^2} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{x+2}{5} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3-x}} \cdot \frac{-5}{(x+2)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{x+2}{5} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3-x}} \cdot \frac{-5}{(x+2)^2} = \left| \text{сократим на } 5(x+2) \right| =$$

$$- \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}(x+2)} \cdot \sqrt{\frac{x+2}{3-x}} =$$

| внесем (x-2) под знак корня и

$$\text{сократим } \left| = - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}(x+2)} \cdot \sqrt{\frac{x+2}{3-x}} = - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{3}{2(x+2) \cdot (3-x)}} = \right.$$

$$= - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}(x+2)(3-x)}.$$

$$y'(0) = - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}(x+2)(3-x)} = - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2} \cdot 2 \cdot 3} = - \frac{1}{4}.$$

**Ответ. а)**  $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}; 0;$

**б)**  $\frac{\operatorname{tg}^2 x - 1}{\cos^2 x} + 2x - \frac{\pi}{2}; 0;$

**в)**  $-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}(x+2)(3-x)}; -\frac{1}{4}.$

2. Дана функция  $y = 4\left[\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + 2\arcsin\frac{x}{2}\right]$ . Найти  $y''$ ,  $y''\left(\frac{6}{5}\right)$ .

**Решение.**

$$y' = 4\left[\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + 2\arcsin\frac{x}{2}\right]'$$

=

по правилам производной суммы и произведения:

$$(u+v)' = u' + v'; \quad u = \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}, \quad v = 2\arcsin\frac{x}{2}$$

$$(u \cdot v)' = u'v + uv', \quad \text{где } u = \frac{x}{2}, \quad v = \sqrt{4-x^2};$$

$$\text{по таблице производных: } (x^2)' = 2x;$$

$$(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u', \quad \text{где } u = 4-x^2;$$

$$(4-x^2)' = -9 \cdot 3 \cdot x^2 = -27x^2; \quad \left(\frac{x}{2}\right)' = \frac{1}{2};$$

$$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'; \quad \left(\arcsin\frac{x}{2}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)' = \frac{2}{\sqrt{4-x^2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$= 4\left[\left(\frac{x}{2}\right)' \sqrt{4-x^2} + \frac{x}{2}(\sqrt{4-x^2})' + 2\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)'\right]$$

$$= 4\left[\frac{\sqrt{4-x^2}}{2} + \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{4-x^2}} \cdot (-2x) + \frac{2}{\sqrt{4-x^2}}\right] = 4\left[\frac{\sqrt{4-x^2}}{2} - \frac{x^2}{2\sqrt{4-x^2}} + \frac{2}{\sqrt{4-x^2}}\right] =$$

$$= 4\left[\frac{\sqrt{4-x^2}}{2} - \frac{x^2-4}{2\sqrt{4-x^2}}\right] = 4\left[\frac{\sqrt{4-x^2}}{2} + \frac{4-x^2}{2\sqrt{4-x^2}}\right] =$$

$$4\left[\frac{\sqrt{4-x^2}}{2} + \frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\right] = 4\sqrt{4-x^2}$$

$$y'' = 4(\sqrt{4-x^2})' = 4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{4-x^2}} \cdot (-2x) = -\frac{4x}{\sqrt{4-x^2}};$$

$$y''\left(\frac{6}{5}\right) = -\frac{4 \cdot \frac{6}{5}}{\sqrt{4-\left(\frac{6}{5}\right)^2}} = -\frac{4 \cdot 6 \cdot 5}{5 \cdot \sqrt{100-36}} = -\frac{4 \cdot 6 \cdot 5}{5 \cdot 8} = -3.$$

**Ответ.**  $y'' = -\frac{4x}{\sqrt{4-x^2}}; -3.$

3. Дана функция  $f(x) = \begin{bmatrix} (x-4)/x \\ x/(x-1) \\ x^2-9 \end{bmatrix}$ . Найти  $f'(x)$  и  $f''(x)$ . Вычислить  $f'(2)$  и  $f''(2)$ .

**Решение.**

$$f'(x) = \begin{bmatrix} ((x-4)/x)' \\ (x/(x-1))' \\ (x^2-9)' \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (\frac{x-4}{x})' = (1-\frac{4}{x})' = 0 + \frac{4}{x^2} = \frac{4}{x^2} \\ (\frac{x}{x-1})' = \frac{x'(x-1) - x(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x}{(x-1)^2} = -\frac{1}{(x-1)^2} \\ (x^2-9)' = 2x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/x^2 \\ -1/(x-1)^2 \\ 2x \end{bmatrix};$$

$$f'(x) = \begin{bmatrix} 4/x^2 \\ -1/(x-1)^2 \\ 2x \end{bmatrix}; f'(2) = \begin{bmatrix} 4/2^2 \\ -1/(2-1)^2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

$$f''(x) = \begin{bmatrix} (4/x^2)' \\ (-1/(x-1)^2)' \\ (2x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8/x^3 \\ 2/(x-1)^3 \\ 2 \end{bmatrix};$$

$$f''(x) = \begin{bmatrix} -8/x^3 \\ 2/(x-1)^3 \\ 2 \end{bmatrix}; f''(2) = \begin{bmatrix} -8/2^3 \\ 2/(2-1)^3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

**Ответ.**  $f'(x) = \begin{bmatrix} 4/x^2 \\ -1/(x-1)^2 \\ 2x \end{bmatrix}; f'(2) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix};$

$$f''(x) = \begin{bmatrix} -8/x^3 \\ 2/(x-1)^3 \\ 2 \end{bmatrix}; f''(2) = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

4. Докажите, что функция  $z = \ln(x^2 + y^2 + 2x + 1)$  удовлетворяет уравнению  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ .

**Решение.**

Находим частные производные первого порядка

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left( \ln(x^2 + y^2 + 2x + 1) \right)'_x = \frac{1}{x^2 + y^2 + 2x + 1} \cdot (x^2 + y^2 + 2x + 1)'_x = \left. \begin{array}{l} x'_x = 1 \\ y^2 - const \\ (y^2)'_x = 0 \\ 1' = 0 \end{array} \right| =$$
$$= \frac{2x + 2}{x^2 + y^2 + 2x + 1};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left( \ln(x^2 + y^2 + 2x + 1) \right)'_y = \frac{1}{x^2 + y^2 + 2x + 1} \cdot (x^2 + y^2 + 2x + 1)'_y = \left. \begin{array}{l} x^2; 2x - const \\ (x^2)'_y = 0 \\ (2x)'_y = 0 \end{array} \right| =$$
$$= \frac{2y}{x^2 + y^2 + 2x + 1};$$

Находим частные производные второго порядка

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \left( \frac{2x+2}{x^2+y^2+2x+1} \right)'_x = \\ &= \frac{(2x+2)'_x (x^2+y^2+2x+1) - (2x+2)(x^2+y^2+2x+1)'_x}{(x^2+y^2+2x+1)^2} = \\ &= \frac{2(x^2+y^2+2x+1) - (2x+2)(2x+2)}{(x^2+y^2+2x+1)^2} = \frac{2x^2+2y^2+4x+2-4x^2-8x-4}{(x^2+y^2+2x+1)^2} = \\ &= \frac{2y^2-2x^2-4x-2}{(x^2+y^2+2x+1)^2};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \left( \frac{2x+2}{x^2+y^2+2x+1} \right)'_y = \\ &= \frac{(2x+2)'_y (x^2+y^2+2x+1) - (2x+2)(x^2+y^2+2x+1)'_y}{(x^2+y^2+2x+1)^2} = \frac{0-2y(2x+2)}{(x^2+y^2+2x+1)^2} = \\ &= \frac{-4xy-4y}{(x^2+y^2+2x+1)^2} =\end{aligned}$$

Подставим найденные значения в уравнение:  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$

$$\frac{2y^2-2x^2-4x-2}{(x^2+y^2+2x+1)^2} + \frac{-4xy-4y}{(x^2+y^2+2x+1)^2} = 0;$$

$$\frac{2y^2-2x^2-4x-2-4xy-4y}{(x^2+y^2+2x+1)^2} = 0 \text{ — не является тождеством.}$$

**Ответ.** Функция не удовлетворяет уравнению.

5. Дана функция  $f(x; y) = \begin{bmatrix} 3tg(x+3y) \\ \sin(4x+8y) \end{bmatrix}$ . Найти  $f'(x; y)$ . Вычислить

$$f'\left(-\frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{12}\right).$$

**Решение.**  $f'(x; y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix};$

$$\begin{aligned}
 f'(x; y) &= \begin{bmatrix} 3(\operatorname{tg}(x+3y))'_x & 3(\operatorname{tg}(x+3y))'_y \\ (\sin(4x+8y))'_x & (\sin(4x+8y))'_y \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{3}{\cos^2(x+3y)} \cdot (x+3y)'_x & \frac{3}{\cos^2(x+3y)} \cdot (x+3y)'_y \\ \cos(4x+8y) \cdot (4x+8y)'_x & \cos(4x+8y) \cdot (4x+8y)'_y \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{3}{\cos^2(x+3y)} \cdot 1 & \frac{3}{\cos^2(x+3y)} \cdot 3 \\ \cos(4x+8y) \cdot 4 & \cos(4x+8y) \cdot 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{\cos^2(x+3y)} & \frac{9}{\cos^2(x+3y)} \\ 4\cos(4x+8y) & 8\cos(4x+8y) \end{bmatrix}; \\
 f'(-\frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{12}) &= \begin{bmatrix} \frac{3}{\cos^2(-\frac{\pi}{12} + \frac{3\pi}{12})} & \frac{9}{\cos^2(-\frac{\pi}{12} + \frac{3\pi}{12})} \\ 4\cos(-\frac{4\pi}{12} + \frac{8\pi}{12}) & 8\cos(-\frac{4\pi}{12} + \frac{8\pi}{12}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{\cos^2 \frac{\pi}{6}} & \frac{9}{\cos^2 \frac{\pi}{6}} \\ 4\cos \frac{\pi}{3} & 8\cos \frac{\pi}{3} \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{3}{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2} & \frac{9}{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2} \\ 4 \cdot \frac{1}{2} & 8 \cdot \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Сумма элементов матрицы:  $4+12+2+4=22$ .

**Ответ.** 22.

**6.**

Для функции  $u = 7 \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ . Найти:

- координаты вектора градиента в точке  $A(3; -2; 1)$ ;
- $\frac{\partial u}{\partial a}$  в точке  $A$  в направлении вектора  $\vec{a}\{1; 2; 2\}$ .

**Решение.**

- Найдем частные производные функции.



$$\frac{\partial u}{\partial x} = (7 \ln(x^2 + y^2 + z^2))'_x = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \cdot (x^2 + y^2 + z^2)'_x = \left. \begin{array}{l} x'_x = 1 \\ y^2, z^2 - const \\ (y^2)'_x = 0 \\ (z^2)'_x = 0 \end{array} \right| =$$

$$= 7 \cdot \frac{2x}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{14x}{x^2 + y^2 + z^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = (7 \ln(x^2 + y^2 + z^2))'_y = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \cdot (x^2 + y^2 + z^2)'_y = \left. \begin{array}{l} y'_y = 1 \\ x^2, z^2 - const \\ (x^2)'_y = 0 \\ (z^2)'_y = 0 \end{array} \right| =$$

$$= 7 \cdot \frac{2y}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{14y}{x^2 + y^2 + z^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = (7 \ln(x^2 + y^2 + z^2))'_z = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \cdot (x^2 + y^2 + z^2)'_z = \left. \begin{array}{l} z'_z = 1 \\ y^2, x^2 - const \\ (y^2)'_z = 0 \\ (x^2)'_z = 0 \end{array} \right| =$$

$$= 7 \cdot \frac{2z}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{14z}{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\text{grad } u = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(A)}; \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{(A)}; \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{(A)} \right\}.$$

$$\text{grad } u = \left\{ \frac{14x}{x^2 + y^2 + z^2}; \frac{14y}{x^2 + y^2 + z^2}; \frac{14z}{x^2 + y^2 + z^2} \right\}.$$

Найдем градиент в точке А, подставив координаты точки:

$$\text{grad } u = \left\{ \frac{14 \cdot 3}{3^2 + (-2)^2 + 1^2}; \frac{14 \cdot (-2)}{3^2 + (-2)^2 + 1^2}; \frac{14 \cdot 1}{3^2 + (-2)^2 + 1^2} \right\};$$

$$\text{grad } u = \left\{ \frac{42}{14}; \frac{-28}{14}; \frac{14}{14} \right\};$$

$$\text{grad } u = \{3; -2; 1\}$$

2)

Производную в точке  $A$  в направлении вектора  $\vec{a} = \{1; 2; 2\}$  найдем по формуле:

$$\frac{\partial u}{\partial a} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_A \cdot \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_A \cdot \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_A \cdot \cos \gamma,$$

где  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  - направляющие косинусы вектора (координаты единичного вектора  $\vec{e}$ , соответствующего вектору  $\vec{a} = \{1; 2; 2\}$ ).

$$\vec{e} = \left\{ \frac{x_a}{|\vec{a}|}; \frac{y_a}{|\vec{a}|}; \frac{z_a}{|\vec{a}|} \right\}; \quad x_a, y_a, z_a - \text{координаты вектора } \vec{a}.$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3;$$

$$\vec{e} = \left\{ \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3} \right\}$$

$$\frac{\partial u}{\partial a} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_A \cdot \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_A \cdot \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_A \cdot \cos \gamma = 3 \cdot \frac{1}{3} - 2 \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

**Ответ.**  $\text{grad } u = \{3; -2; 1\}; \quad \frac{\partial u}{\partial a} = \frac{1}{3}.$

7. Найти  $y''_{xx}$ , если  $\begin{cases} x = \cos^2 t, \\ y = \ln \sin t. \end{cases}$  Вычислить  $y''_{xx}$ , если  $t = \frac{\pi}{6}$ .

**Решение.**

$$\text{Найдем } y'_x \quad y'_t = (\ln \sin t)' = \frac{1}{\sin t} \cdot (\sin t)' = \frac{\cos t}{\sin t} = \text{ctgt};$$

$$x'_t = (\cos^2 t)' = 2 \cos t \cdot (\cos t)' = -2 \sin t \cos t = -\sin 2t.$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = -\frac{\text{ctgt}}{2 \sin t \cos t} = -\frac{\cos t}{2 \sin t \sin t \cos t} = -\frac{1}{2 \sin^2 t}.$$

Найдем  $y''_{xx}$ .

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{\left(-\frac{1}{2\sin^2 t}\right)'}{-2\sin t \cos t} = \frac{1 \left(\frac{1}{\sin^2 t}\right)'}{4 \sin t \cos t} =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{-2\sin^{-3} t (\sin t)'}{\sin t \cos t} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\cos t}{\sin^3 t \sin t \cos t} = -\frac{1}{2\sin^4 t}$$

$$\text{При } t = \frac{\pi}{6} \quad y''_{xx} = -\frac{1}{2\sin^4 \frac{\pi}{6}} = -\frac{1}{2 \cdot \frac{1}{16}} = -8.$$

**Ответ.**  $y''_{xx} = -\frac{1}{2\sin^4 t}; \quad -8.$

8. Функция  $z = z(x; y)$  задана неявно уравнением  $z^3 + 3x^2z = 2xy$ . Вычислить  $\frac{\partial z}{\partial x}(-1; 0; 0)$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}(-1; 0; 0)$ .

**Решение.**

Частные производные найдем по формулам:  $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x; y; z)}{F'_z(x; y; z)}$ ;  $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x; y; z)}{F'_z(x; y; z)}$ .

Т.к.  $z^3 + 3x^2z = 2xy$ , то

$$F(x; y; z) = z^3 + 3x^2z - 2xy;$$

$$1) F'_x(x; y; z)|_{y, z = \text{const}} = (z^3 + 3x^2z - 2xy)'_x = 6xz - 2y;$$

$$2) F'_y(x; y; z)|_{x, z = \text{const}} = (z^3 + 3x^2z - 2xy)'_y = -2x;$$

$$3) F'_z(x; y; z)|_{x, y = \text{const}} = (z^3 + 3x^2z - 2xy)'_z = 3z^2 + 3x^2.$$

Подставим найденное в формулы частных производных:

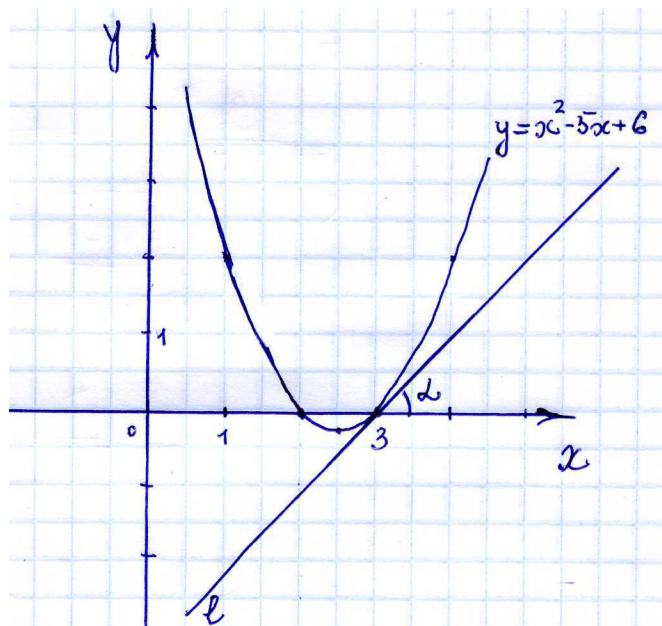
$$a) \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x; y; z)}{F'_z(x; y; z)} = \frac{6xz - 2y}{3z^2 + 3x^2}; \quad \frac{\partial z}{\partial x}(-1; 0; 0) = \frac{0}{3} = 0$$

$$б) \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x; y; z)}{F'_z(x; y; z)} = \frac{-2x}{3z^2 + 3x^2}; \quad \frac{\partial z}{\partial y}(-1; 0; 0) = \frac{2}{3}$$

**Ответ.** а)  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{6xz - 2y}{3z^2 + 3x^2}; \quad 0;$  б)  $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-2x}{3z^2 + 3x^2}; \quad \frac{2}{3}.$

9. Найти острый угол между осью  $Ox$  и касательной к графику функции  $y = x^2 - 5x + 6$  в точке  $x_0 = 3$ .

**Решение.**



Касательная  $l$  имеет уравнение  $y = kx + b$ ,  $k$  – угловой коэффициент касательной.  $k = \operatorname{tg} \alpha$ ,  $\alpha$  – угол между осью  $Ox$  и касательной.

$$k = \operatorname{tg} \alpha = y'(x) = (x^2 - 5x + 6)' = 2x - 5;$$

$$\text{В точке } x_0 = 3: \operatorname{tg} \alpha = 2 \cdot 3 - 5 = 1; \alpha = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

**Ответ.**  $\frac{\pi}{4}$ .

10. Найти  $dy$ , если  $y = \arcsin x$ . Вычислить значение  $dy$ , если  $x = 0$ ,  $\Delta x = 0,08$ .

**Решение.**

$$dy = y'(x)dx$$

$$y' = (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$dy = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx;$$

$$dy = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \Delta x = \frac{1}{\sqrt{1-0}} \cdot 0,08 = 0,08.$$

**Ответ.**  $dy = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx; 0,08.$

11. Дана функция  $z = 3x^2 - xy + x + y$  и точки  $M_0(1;3)$  и  $M_1(1,06;2,92)$ .  
Вычислить  $\Delta z$  и  $dz$  при переходе из точки  $M_0$  в точку  $M_1$ .

**Решение.**  $z(M_1) = 3 \cdot 1,06^2 - 1,06 \cdot 2,92 + 1,06 + 2,92 = 4,2556;$

$dz = z'_x(M_0)\Delta x + z'_y(M_0)\Delta y$  - полный дифференциал

$\Delta x = 1,06 - 1 = 0,06; \quad \Delta y = 2,92 - 3 = -0,08;$

$z(M_0) = 3 - 3 + 1 + 3 = 4$

$z'_x = (3x^2 - xy + x + y)'_x = 6x - y + 1; \quad z'_x(M_0) = 6 - 3 + 1 = 4;$

$z'_y = (3x^2 - xy + x + y)'_y = -x + 1; \quad z'_y(M_0) = -1 + 1 = 0;$

$dz = z'_x(M_0)\Delta x + z'_y(M_0)\Delta y = 4 \cdot 0,06 + 0 \cdot (-0,08) = 0,24;$

$\Delta z = z(M_1) - z(M_0) = 4,2556 - 4 = 0,2556 \approx 0,26$  - приращение функции

**Ответ.**  $\Delta z = 0,26; \quad dz = 0,24.$

12. Найти наибольшее и наименьшее значение функций на заданных отрезках

$f(x) = 4 - x - \frac{4}{x^2}$  на заданном отрезке  $[1;4]$ .

**Решение.**

Функция определена и непрерывна на отрезке  $[1;4]$ , наибольшее или наименьшее значения она может достигать на концах отрезка или в точке экстремума.

Найдем значение функции на концах отрезка и в стационарных точках, принадлежащих отрезку.

1) Значения функции на концах отрезка:

$f(1) = 4 - 1 - \frac{4}{1^2} = -1;$

$$f(4) = 4 - 4 - \frac{4}{4^2} = -\frac{1}{4};$$

2) Найдем стационарные точки.

$$f'(x) = \left(4 - x - \frac{4}{x^2}\right)' = -1 + \frac{8}{x^3} = \frac{8 - x^3}{x^3} \text{ (по таблице производных: т.к.}$$

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}, \text{ то } (4x^{-2})' = 4 \cdot (-2)x^{-3} = \frac{-8}{x^3}; x' = 1; \text{ т.к. } C' = 0, \text{ то } 4' = 0 \text{ ).}$$

$$f'(x) = 0; \quad \frac{8 - x^3}{x^3} = 0;$$

$$\begin{cases} 8 - x^3 = 0; \\ x^3 \neq 0. \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = 2; \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$x = 2 \in [1; 4]$ , найдем  $f(2)$

$$f(2) = 4 - 2 - \frac{4}{2^2} = 1$$

Из найденных значений:

$$f(1) = -1$$

$$f(4) = -\frac{1}{4} \text{ - наименьшее}$$

$$f(2) = 1 \text{ - наибольшее.}$$

**Ответ.**  $f(4) = -\frac{1}{4}$  - наименьшее значение функции

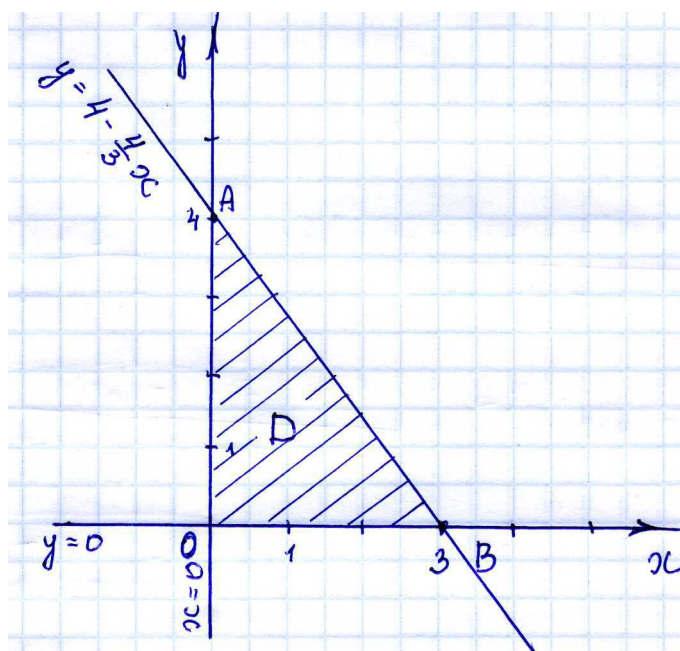
$f(2) = 1$  - наибольшее значение функции.

13. Дана функция  $z = \frac{xy}{2} - \frac{x^2y}{6} - \frac{xy^2}{8}$ . Найти ее наименьшее и наибольшее

значения на замкнутом множестве, ограниченном прямыми  $y=0$ ,  $x=0$ ,

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1.$$

**Решение.**



Область  $D$  ограничена прямыми:  $y=0, x=0, y = 4 - \frac{4}{3}x$ .

$O(0;0); A(0;4); B(3;0)$ .

1) Найдем стационарные точки, лежащие внутри области  $D$  из условия:

$$\begin{cases} z'_x = 0; \\ z'_y = 0. \end{cases}$$

$$z'_x(y - const) = \left( \frac{xy}{2} - \frac{x^2y}{6} - \frac{xy^2}{8} \right)'_x = \frac{y}{2} - \frac{2xy}{6} - \frac{y^2}{8} = \frac{y}{2} - \frac{xy}{3} - \frac{y^2}{8};$$

$$z'_y(x - const) = \left( \frac{xy}{2} - \frac{x^2y}{6} - \frac{xy^2}{8} \right)'_y = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{6} - \frac{2xy}{8} = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{6} - \frac{xy}{4};$$

$$\begin{cases} \frac{y}{2} - \frac{xy}{3} - \frac{y^2}{8} = 0; & | \cdot 24 \\ \frac{x}{2} - \frac{x^2}{6} - \frac{xy}{4} = 0. & | \cdot 12 \end{cases} \begin{cases} 12y - 8xy - 3y^2 = 0; \\ 6x - 2x^2 - 3xy = 0. \end{cases}$$

Выразим из второго уравнения  $y$  ( $3xy = 6x - 2x^2; y = 2 - \frac{2}{3}x$ ) и подставим в

первое уравнение:  $12(2 - \frac{2}{3}x) - 8x(2 - \frac{2}{3}x) - 3(2 - \frac{2}{3}x)^2 = 0;$

$$24 - 8x - 16x + \frac{16}{3}x - 12 + 8x - \frac{4}{3}x^2 = 0;$$

$$24 - 16x + \frac{16}{3}x^2 - 12 - \frac{4}{3}x^2 = 0;$$

$$4x^2 - 16x + 12 = 0;$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4; \\ x_1 \cdot x_2 = 3. \end{cases}$$

$$x_1 = 1; \quad x_2 = 3.$$

$$y_1 = 2 - \frac{2}{3} = 1\frac{1}{3}; \quad y_2 = 2 - \frac{2}{3} \cdot 3 = 0$$

$$(1; 1\frac{1}{3}) \in D \quad (3; 0) \in D$$

Найдем значения функции в этих точках:

$$z(1; 1\frac{1}{3}) = \frac{1 \cdot \frac{4}{3}}{2} - \frac{1 \cdot \frac{4}{3}}{6} - \frac{1 \cdot \frac{16}{9}}{8} = \frac{2}{3} - \frac{2}{9} - \frac{2}{9} = \frac{2}{9};$$

$$z(1; 1\frac{1}{3}) = \frac{2}{9}.$$

$$\underline{z(3; 0) = 0.}$$

2) найдем наибольшее, наименьшее значения функции на границах области.

На границе  $OA$ :  $x = 0$ ;  $y \in [0; 4]$ ;  $z(x; y) = z(0; y) = 0$

Значение функции в точке  $A(0; 4)$ :

$$\underline{z(A) = z(0; 4) = 0;}$$

Значение функции в точке  $O(0; 0)$ :

$$\underline{z(O) = z(0; 0) = 0}$$

На границе  $AB$ :

$$y = 4 - \frac{4}{3}x; \quad x \in [0; 3]; \quad z(x; y = 4 - \frac{4}{3}x) = \frac{x(4 - \frac{4}{3}x)}{2} - \frac{x^2(4 - \frac{4}{3}x)}{6} - \frac{x(4 - \frac{4}{3}x)^2}{8} =$$
$$= 2x - \frac{2}{3}x^2 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{9}x^3 - \frac{1}{2}x + \frac{4}{3}x^2 - \frac{2}{9}x^3 = \frac{3}{2}x;$$

$$z'_x = \frac{3}{2}$$

$z'_x \neq 0$  – на границе  $AB$  нет стационарных точек

Значение функции в точке  $B(3; 0)$ :

$$\underline{z(B) = z(3; 0) = 0}$$

На границе  $OB$ :  $y = 0$ ;  $x \in [0; 3]$ ;  $z(x; y = 0) = 0.$

Из полученных значений функции выбираем наибольшее, наименьшее:



$$z(1; \frac{1}{3}) = \frac{2}{9} - \text{наибольшее}$$

$$z(0;4) = z(3;0) = z(0;0) = 0 - \text{наименьшее}$$

**Ответ.**  $z_{\text{наим}} = z(0;4) = z(3;0) = z(0;0) = 0$ ;  $z_{\text{наиб}} = z(1; \frac{1}{3}) = \frac{2}{9}$ .

**14.** Провести полное исследование функции  $y = \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}$  и начертить ее график

**Решение.**

1)  $D(y)$ :  $x \neq 0$ .

2)

а) Исследуем функцию на четность и нечетность:

$$y(-x) = \frac{3}{-x} - \frac{1}{(-x)^3} = -\left(\frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}\right)$$

Условие  $y(-x) = -y(x)$  выполняется, поэтому функция является нечетной.

б) Функция неперiodическая.

в) Найдем точки пересечения с осью  $Ox$  (для этого решим уравнение  $y=0$ ).

$$\frac{3}{x} - \frac{1}{x^3} = 0; \quad \frac{3x^2 - 1}{x^3} = 0; \quad 3x^2 = 1; \quad x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad x \neq 0;$$

$$\left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}; 0\right)$$





Точек пересечения с осью  $Oy$  ( $x=0$ ) нет, т.к.  $y(0)$  – не существует.

3) Исследуем функцию на монотонность и экстремум.

$$y' = \left(\frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}\right)' = \begin{array}{l} (u+v)' = u' + v' \\ (x^n)' = nx^{n-1} \\ \frac{3}{x} = 3x^{-1} \\ \frac{1}{x^3} = x^{-3} \end{array} = -\frac{3}{x^2} + \frac{3}{x^4} = \frac{3-3x^2}{x^4} = \frac{3(1-x^2)}{x^4}.$$

$$y'=0; \quad \frac{3(1-x^2)}{x^4} = 0; \quad 1-x^2 = 0; \quad x = \pm 1; \quad x \neq 0.$$

Исследуем знаки производной на интервалах, на которые область определения функции разбивается этими точками.

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$		$(0; 1)$	1	$(0; +\infty)$
y'	-	0	+		+	0	-
y		-2				2	

$$y_{\min} = y(-1) = -2; \quad y_{\max} = y(1) = 2$$

2) Найдём интервалы выпуклости, вогнутости графика, точки перегиба.

Находим вторую производную.

$$y'' = \left(-\frac{3}{x^2} + \frac{3}{x^4}\right)' = \frac{6}{x^3} - \frac{12}{x^5} = \frac{6x^2 - 12}{x^5} = \frac{6(x^2 - 2)}{x^5}.$$

$$y'' = 0; \quad \frac{6(x^2 - 2)}{x^5} = 0; \quad x^2 - 2 = 0; \quad x \pm \sqrt{2}; \quad x \neq 0$$

Исследуем знак  $y''$  на интервалах, на которые область определения разбивается этими точками.

x	$(-\infty; -\sqrt{2})$	$-\sqrt{2}$	$(-\sqrt{2}; 0)$	0	$(0; \sqrt{2})$	$\sqrt{2}$	$(\sqrt{2}; +\infty)$
y''	+	0	-	-	-		+
График	вогнутый	$-\frac{5}{2\sqrt{2}} \approx -1,8$	выпуклый	-	выпуклый	$\frac{5}{2\sqrt{2}} \approx 1,8$	вогнутый

$(-\sqrt{2}; -\frac{5}{2\sqrt{2}})$ ;  $(\sqrt{2}; \frac{5}{2\sqrt{2}})$  – точки перегиба графика функции.

5) Асимптоты графика функции.

а) Вертикальные асимптоты.

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{3x^2 - 1}{x^3} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{3x^2 - 1}{x^3} = -\infty.$$

$x = 0$  – вертикальная асимптота.

б) Наклонные асимптоты найдем из условия:  $y=kx+b$ ,

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}; \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx).$$

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 1}{x^3 \cdot x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 1}{x^4}$$

Разделим числитель и знаменатель дроби на старшую степень  $x^4$ , получим:

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^4}}{1} = 0,$$

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^4}}{1} = 0,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 1}{x^3} - 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 1}{x^3} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

Разделим числитель и знаменатель дроби на старшую степень  $x^3$ , получим:

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}}{0} = 0$$

$y = 0$  - горизонтальная асимптота графика функции.

3) Дополнительные точки:

x	-3	-2	2	3
y	$\approx -1$	$\approx -1,4$	$\approx 1,4$	$\approx 1$

