Контрольная работа по дискретной математике

Задача 1.

Сколькими способами из колоды в 36 листов можно выбрать неупорядоченный набор из 5 карт так, чтобы в этом наборе были точно 1 дама, 2 крестовые карты, 1 бубновая карта?

Решение.

Рассмотрим случай, когда в наборе крестовая дама, еще одна крестовая карта, одна бубновая карта (но не дама), еще две карты пиковой или червовой масти (не дамы). Выбрать крестовую даму можно единственным способом, выбрать еще одну крестовую карту из остальных 8 крестовых карт - 8 способами, одну бубновую карту из 8 бубновых карт (так как нельзя выбрать даму) - 8 способами. Выбрать еще две карты из $8+8=16$ карт (кроме дам) пиковой или червовой масти можно C_{16}^{2} способами. Согласно правилу произведения, получим число способов составить такой набор:

$$1 \cdot 8 \cdot 8 \cdot C_{16}^{2} = 64 \cdot \frac{16!}{2!\,14!} = 64 \cdot \frac{15 \cdot 16}{2} = 7680$$

Рассмотрим случай, когда в наборе бубновая дама, две крестовые карты (не дамы), еще две карты пиковой или червовой масти (не дамы). Выбрать бубновую даму можно единственным способом, выбрать две крестовые карты из остальных 8 крестовых карт - C_{8}^{2} способами. Выбрать еще две карты из $8+8=16$ карт (кроме дам) пиковой или червовой масти можно C_{16}^{2} способами. Согласно правилу произведения, получим число способов составить такой набор:

$$1 \cdot C_{8}^{2} \cdot C_{16}^{2} = \frac{8!}{2!\,6!} \cdot \frac{16!}{2!\,14!} = \frac{7 \cdot 8}{2} \cdot \frac{15 \cdot 16}{2} = 3360$$

Рассмотрим случай, когда в наборе дама пиковой или червовой масти (можно выбрать 2 способами), две крестовые карты (не дамы, можно выбрать C_{8}^{2} способами), одна бубновая карта (не дама, можно выбрать 8 способами), еще одна карта пиковой или червовой масти (можно выбрать 8 способами). Число способов составить такой набор:

$$2 \cdot C_{8}^{2} \cdot 8 \cdot 8 = 128 \cdot \frac{7 \cdot 8}{2} = 3584$$

Итого, общее число способов составить такой набор:

$$7680 + 3360 + 3584 = 14624$$

Ответ. 14624 способов.

Задача 3.

Найти коэффициент, полученнный при x^{27} в разложении выражения $(2+x^{3}+x^{9})^{9}$ по полиномиальной формуле после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых.

Решение.

Согласно полиномиальной формуле, общий вид каждого члена разложения выражения $(2+x^3+x^9)^9$:

$$\frac{9!}{a!\,b!\,c!}\cdot 2^a(x^3)^b(x^9)^c=\frac{9!}{a!\,b!\,c!}\cdot 2^a x^{3b+9c}$$

При этом $a+b+c=9$. Подберем все возможные a,b,c такие, что $a+b+c=9$ и $3b+9c=27$, то есть

$$\begin{cases}a+b+c=9\\ b+3c=9\end{cases}\rightarrow\begin{cases}a=2c\\ b=9-3c\end{cases}$$

Получим наборы $(a=0;b=9;c=0)$; $(a=2,b=6,c=1)$; $(a=4,b=3,c=2)$; $(a=6,b=0,c=3)$.

Тогда искомый коэффициент после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых равен:

$$\frac{9!}{0!\,9!\,0!}\cdot 2^0+\frac{9!}{2!\,6!\,1!}\cdot 2^2+\frac{9!}{4!\,3!\,2!}\cdot 2^4+\frac{9!}{6!\,0!\,3!}\cdot 2^6=$$

$$=1+\frac{7\cdot 8\cdot 9}{2}\cdot 4+\frac{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2}\cdot 16+\frac{7\cdot 8\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 64=$$

$$=1+252\cdot 4+1260\cdot 16+84\cdot 64=26545$$

Ответ. 26545.

Задача 4.

Сколько натуральных чисел от 1 до 10000 не делится ни на 4, ни на 5, ни на 2, ни на 17?

Решение.

Пусть U - множество натуральных чисел от 1 до 10000, A - множество натуральных чисел от 1 до 10000, которые делятся на 2, B - на 4, C - на 5, D - на 17.

$$|U|=10000$$

Заметим, что на 2 делится каждое второе натуральное число, поэтому

$$|A|=\left[\frac{10000}{2}\right]=5000$$

$[x]$ - целая часть числа x.

На 4 делится каждое четвертое натуральное число, поэтому

$$|B|=\left[\frac{10000}{4}\right]=2500$$

Аналогично,

$$|C| = \left[\frac{10000}{5}\right] = 2000; |D| = \left[\frac{10000}{17}\right] = 588$$

На 2 и 4 делятся числа, которые делятся на 4, то есть $|A \cap B| = |B| = 2500$. На 2 и 5 делятся числа, которые делятся на 10, то есть $|A \cap C| = \left[\frac{10000}{10}\right] = 1000$. Аналогично,

$$|A \cap D| = \left[\frac{10000}{2 \cdot 17}\right] = 294; |B \cap C| = \left[\frac{10000}{4 \cdot 5}\right] = 500; |B \cap D| = \left[\frac{10000}{4 \cdot 17}\right] = 147;\ |C \cap D| = \left[\frac{10000}{5 \cdot 17}\right] = 117$$

$$|A \cap B \cap C| = \left[\frac{10000}{4 \cdot 5}\right] = 500;\ |A \cap B \cap D| = \left[\frac{10000}{4 \cdot 17}\right] = 147;$$

$$|A \cap C \cap D| = \left[\frac{10000}{2 \cdot 5 \cdot 17}\right] = 58;\ |B \cap C \cap D| = \left[\frac{10000}{4 \cdot 5 \cdot 17}\right] = 29$$

$$|A \cap B \cap C \cap D| = \left[\frac{10000}{4 \cdot 5 \cdot 17}\right] = 29$$

Используем формулу включения-исключения:

$$|A \cup B \cup C \cup D| = (|A| + |B| + |C| + |D|) -$$

$$-(|A \cap B| + |A \cap C| + |A \cap D| + |B \cap C| + |B \cap D| + |C \cap D|) +$$

$$+(|A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D|) - |A \cap B \cap C \cap D| =$$

$$= (5000 + 2500 + 2000 + 588) - (2500 + 1000 + 294 + 500 + 147 + 117) +$$

$$+(500 + 147 + 58 + 29) - 29 = 6235$$

Итак, 6235 чисел делятся хотя бы на одно из чисел 2, 4, 5, 17. Тогда ни на одно из них не делится $10000 - 6235 = 3765$ чисел.

Ответ. 3765

Задача 6.

Найти сумму, используя метод приведения.

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k-3}(k+3)$$

Решение.

С одной стороны,

$$S_{n+1} = a_0 + \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-3}(k+3) = (-1)^{0-3}(0+3) + \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k-2}(k+4) =$$

$$= -3 - \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k-3}(k+3+1) = -3 - \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k-3}(k+3) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k-3} =$$

$$= -3 - S_n + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k$$

С другой стороны,

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} = S_n + (-1)^{n-2}(n+4)$$

Получим уравнение:

$$S_n + (-1)^{n-2}(n+4) = -3 - S_n + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k$$

Отсюда имеем

$$S_n = \frac{1}{2}\left(-3 - (-1)^{n-2}(n+4) + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\right)$$

Найдем аналогичным образом сумму

$$Z_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k$$

$$Z_{n+1} = (-1)^0 + \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k = 1 - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k = 1 - Z_n$$

$$Z_{n+1} = Z_n + a_{n+1} = Z_n + (-1)^{n+1}$$

$$Z_n + (-1)^{n+1} = 1 - Z_n$$

$$Z_n = \frac{1}{2}(1 - (-1)^{n+1}) = \frac{1 + (-1)^n}{2}$$

Итак, для исходной суммы:

$$S_n = \frac{1}{2}\left(-3 - (-1)^{n-2}(n+4) + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\right) = \frac{1}{2}\left(-3 - (-1)^{n-2}(n+4) + \frac{1 + (-1)^n}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}(-6 - (-1)^n(2n+8) + 1 + (-1)^n) = \frac{1}{4}\left(-5 + (-1)^n(1 - 2n - 8)\right) = \frac{(-1)^{n+1}(2n+7) - 5}{4}$$

Ответ.

$$S_n = \frac{(-1)^{n+1}(2n+7) - 5}{4}$$

Задача 7.

Найти производящую функцию последовательности

$$a_k = \frac{5}{3^k} + k - 1$$

Решение.

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{3^n} + n - 1\right) z^n = 5\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} n z^n - \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

Найдем отдельно каждую из сумм.

Используя сумму геометрической прогрессии, получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{z^0}{1-z} = \frac{1}{1-z}$$

Аналогично,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{z}{3}} = \frac{3}{3-z}$$

Далее,

$$\sum_{n=0}^{\infty} n z^n = z\sum_{n=0}^{\infty} n z^{n-1} = z\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dz}(z^n) = z \cdot \frac{d}{dz}\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right) = z \cdot \frac{d}{dz}\frac{1}{1-z} = \frac{z}{(1-z)^2}$$

Итак, окончательно получим:

$$G(z) = 5\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} n z^n - \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 5 \cdot \frac{3}{3-z} + \frac{z}{(1-z)^2} - \frac{1}{1-z} =$$

$$= \frac{15(z^2-2z+1) + z(3-z) + (1-z)(3-z)}{(3-z)(1-z)^2} = \frac{13z^2 - 23z + 12}{(3-z)(1-z)^2}$$

Ответ.

$$G(z) = \frac{13z^2 - 23z + 12}{(3-z)(1-z)^2}$$

Задача 9.

Найти общий член последовательности a_n, для которой функция $f(x) = \ln(2-x)^2$ является производящей.

Решение.

Разложим заданную функцию в ряд по степеням x.

$$f(x) = \ln(2-x)^2 = 2\ln(2-x) = 2\ln 2\left(1-\frac{x}{2}\right) = 2\ln 2 + 2\ln\left(1-\frac{x}{2}\right)$$

Используем стандартное разложение

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Получим

$$f(x) = 2\ln 2 + 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\cdot\left(-\frac{x}{2}\right)^{n+1} = 2\ln 2 + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{2n+1}}{(n+1)\cdot 2^n}\cdot x^{n+1} = 2\ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{n\cdot 2^{n-1}}\cdot x^n$$

$$= 2\ln 2\cdot x^0 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{n\cdot 2^{n-1}}\cdot x^n$$

Тогда общий член последовательности, для которой функция $f(x)$ является производящей:

$$a_n = -\frac{1}{n\cdot 2^{n-1}}$$

Ответ.

$a_n = -\dfrac{1}{n\cdot 2^{n-1}}$

Задача 11.

Решить реккурентное соотношение $a_{n+2} - a_{n+1} - 12a_n = 0, a_0 = 10, a_1 = -2.$

Решение.

Составим характеристическое уравнение $r^2 - r - 12 = 0$. Его корни $r = -3, r = 4$. Тогда общее решение реккурентного соотношения:

$$a_n = C_1\cdot(-3)^n + C_2\cdot 4^n$$

Найдем частное решение из условий $a_0 = 10, a_1 = -2$:

$$a_0 = C_1\cdot(-3)^0 + C_2\cdot 4^0 = C_1 + C_2 = 10$$

$$a_1 = C_1\cdot(-3)^1 + C_2\cdot 4^1 = -3C_1 + 4C_2 = -2$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 10 \\ -3C_1 + 4C_2 = -2 \end{cases} \to \begin{cases} 4C_1 + 4C_2 = 40 \\ -3C_1 + 4C_2 = -2 \end{cases} \to 7C_1 = 42; C_1 = 6; C_2 = 4$$

Итак, искомое решение:

$$a_n = 6\cdot(-3)^n + 4\cdot 4^n$$

Ответ. $a_n = 6\cdot(-3)^n + 4\cdot 4^n$

Задача 12.

Решить реккурентное соотношение $2a_{n+2} = 5a_{n+1} - 3a_n - 2 + 3n,\ a_0 = 0, a_1 = 1.$

Решение.

Перепишем соотношение в виде

$$2a_{n+2} - 5a_{n+1} + 3a_n = 3n - 2$$

Составим характеристическое уравнение $2r^2 - 5r + 3 = 0$, его корни $r = 1, r = 3/2$. Общее решение однородного соотношения: $a_n = C_1 \cdot 1^n + C_2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n = C_1 + C_2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n$.

Частное решение неоднородного соотношения будем искать в виде $a_n = n(An + B)$.

$$a_n = An^2 + Bn;$$

$$a_{n+1} = (n+1)(A(n+1) + B) = An^2 + (2A + B)n + (A + B)$$

$$a_{n+2} = (n+2)(A(n+2) + B) = An^2 + (4A + B)n + (4A + 2B)$$

$$2a_{n+2} - 5a_{n+1} + 3a_n = 2\big(An^2 + (4A + B)n + (4A + 2B)\big) -$$

$$-5\big(An^2 + (2A + B)n + (A + B)\big) + 3(An^2 + Bn) =$$

$$= (8A + 2B - 10A - 5B + 3B)n + (8A + 4B - 5A - 5B) =$$

$$= -2An + (3A - B) = 3n - 2$$

$$\begin{cases} -2A = 3 \\ 3A - B = -2 \end{cases};\ A = -\frac{3}{2}; B = -\frac{5}{2}$$

$$a_n = n\left(-\frac{3}{2}n - \frac{5}{2}\right) = -\frac{3}{2}n^2 - \frac{5}{2}n$$

Общее решение заданного неоднородного уравнения:

$$a_n = C_1 + C_2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n - \frac{3}{2}n^2 - \frac{5}{2}n$$

Найдем C_1, C_2:

$$a_0 = C_1 + C_2 = 0$$

$$a_1 = C_1 + \frac{3}{2}C_2 - \frac{3}{2} - \frac{5}{2} = C_1 + \frac{3}{2}C_2 - 4 = 1$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 + \frac{3}{2}C_2 = 5 \end{cases} \to C_2 = 10; C_1 = -10$$

Итак, окончательно получим

$$a_n = 10 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n - \frac{3}{2}n^2 - \frac{5}{2}n - 10$$

Ответ.

$a_n = 10 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n - \frac{3}{2}n^2 - \frac{5}{2}n - 10$