Контрольная работа
Предмет: Линейная алгебра

Задача 1.
В n-мерном линейном пространстве до базиса можно дополнить:

а) любую конечную систему векторов;
б) любую линейно независимую систему векторов;
в) любую систему, состоящую из $(n-1)$-го вектора.

Решение.
Базисом n-мерного линейного пространства называется упорядоченная совокупность n линейно независимых векторов (базисных векторов).

Согласно теореме о дополнении системы векторов до базиса, всякую линейно независимую систему k векторов n-мерного линейного пространства $(1 \le k < n)$ можно дополнить до базиса пространства.

Таким образом, ответы а неверный, ответы б и в неполные.

Ответ.
В n-мерном линейном пространстве до базиса можно дополнить любую линейно независимую систему из k векторов, где $1 \le k < n$.

Задача 2.
Проверьте, является ли данная система векторов линейно зависимой:

$$a_1 = (1; 0; 0; 0), a_2 = (0; 2; 0; 0); a_3 = (0; 0; 0; 4); a_4 = (0; 0; 0; t)$$

а) да; б) нет; в) для некоторых значений t - является, для некоторых - не является.

Решение.
Система векторов называется линейно зависимой, если один из векторов системы можно представить в виде линейной комбинации остальных векторов системы.

При $t \ne 0$: вектор a_4 можно представить в виде $a_4 = \frac{t}{4} \cdot a_3$, то есть система линейно зависима.

В случае $t = 0$: вектор a_4 - нулевой, система, содержащая нулевой вектор, линейно зависима.

Итак, данная система векторов является линейно зависимой при всех t.

Ответ. а) да.

Задача 3.

Напишите матрицу перехода от первого базиса ко второму. Первый базис: e_1, e_2, e_3. Второй базис:

$$f_1 = e_1 + e_2; f_2 = e_2 + e_3; f_3 = e_1 + e_2 + e_3$$

Решение.

Векторы базиса f линейно выражены через векторы базиса e:

$$\begin{cases} f_1 = e_1 + e_2 + 0e_3 \\ f_2 = 0e_1 + e_2 + e_3 \\ f_3 = e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}$$

При этом коэффициенты их разложений по базисным векторам e_1, e_2, e_3 образуют столбцы искомой матрицы перехода:

$$A_{e\to f} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ответ.

$$A_{e\to f} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Задача 4.

Укажите множество, не являющееся подпространством линейного пространства всех квадратных матриц 2-го порядка с действительными коэффициентами:

а) множество всех симметричных матриц;
б) множество всех кососимметричныхматриц;
в) множество всех матриц с определителем, равным 1.

Решение.

L называется подпространством пространства R, если для любых $x, y \in L$ верно, что $x + y \in L$ и для любого $x \in L$: $\lambda x \in L$, где λ- любое вещественное число.

Пусть M- множество всех квадратных матриц 2-го порядка с действительными коэффициентами.

а) Пусть M_1 - множество всех симметричных матриц 2-го порядка с действительными коэффициентами, то есть матриц вида

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

Для произвольных $x, y \in M_1$:

$$x + y = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ b_1 + b_2 & c_1 + c_2 \end{pmatrix} \in M_1$$

Для произвольного $x \in M_1$:

$$\lambda x = \lambda \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda b & \lambda c \end{pmatrix} \in M_1$$

Итак, M_1 является подпространством линейного пространства M.

б) Пусть M_2 - множество всех кососимметричных матриц 2-го порядка с действительными коэффициентами, то есть матриц вида

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$$

Для произвольных $x, y \in M_2$:

$$x + y = \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ -a_1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_2 \\ -a_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_1 + a_2 \\ -a_1 - a_2 & 0 \end{pmatrix} \in M_2$$

Для произвольного $x \in M_2$:

$$\lambda x = \lambda \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda a \\ -\lambda a & 0 \end{pmatrix} \in M_2$$

Итак, M_2 является подпространством линейного пространства M.

3) Пусть M_3 - множество всех матриц 2-го порядка с действительными коэффициентами и с определителем, равным 1.

Например,

$$x = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}; \ \ |x| = 4 - 3 = 1; \ \ |y| = 10 - 9 = 1$$

$$x + y = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}; \ \ |x + y| = 28 - 24 = 4 \neq 1$$

Таким образом, для произвольных $x, y \in M_3$: $x + y \notin M_3$

Итак, M_3 не является подпространством линейного пространства M.

Ответ. в) множество всех матриц с определителем, равным 1.

Задача 5.

Для подпространства, заданного системой

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

найти базис ортогонального дополнения.

Решение.

Найдем фундаментальную систему решений заданной системы.

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 3 & -1 & 2\\ 4 & 0 & 3\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -4 & -1\\ 0 & -4 & -1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -3 & 0\\ 0 & 4 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = 3x_2 \\ x_3 = -4x_2 \end{cases}$$

ФСР состоит из одного вектора. Полагая $x_2 = 1,$ получим:

$$X = \begin{pmatrix}3\\ 1\\ -4\end{pmatrix}$$

Вектор X - базис ортогонального дополнения заданного подпространства.

Ответ.

$$X = \begin{pmatrix}3\\ 1\\ -4\end{pmatrix}$$

Задача 6.

Известно, что у квадратичной формы ранг равен 4, а сигнатура 2. Чему равны положительный и отрицательный индексы инерции?

Решение.

Число положительных канонических коэфициентов квадратичной формы называется положительным индексом инерции квадратичной формы. Число отрицательных канонических коэффициентов квадратичной формы называется отрицательным индексом инерции квадратичной формы. Разность между положительным и отрицательным индексами квадратичной формы называется сигнатурой квадратичной формы. Число ненулевых канонических коэффициентов называется рангом квадратичной формы.

Таким образом, если положительный индекс инерции квадратичной формы равен p, а отрицательный - q, то

$$\begin{cases} p + q = 4 \\ p - q = 2 \end{cases}$$

Отсюда получим: $p = 3, q = 1.$

Ответ. Положительный индекс инерции квадратичной формы равен 3, отрицательный равен 1.

Задача 7.

Укажите системы векторов, ортогональных подпространству L_1 - линейной оболочке векторов $a_1 = (2; 2; 2; 2), a_2 = (-1; 1; -1; 1)$.

а) $\{(1; 1; 1; 1), (-1; 1; -1; 1)\}$;
б) $\{(1; 0; -1; 0), (1; -1; 1; -1)\}$;
в) $\{(1; 0; -1; 0), (0; 1; 0; -1)\}$.

Решение.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = -x_4 \end{cases};$$

Полагая $x_3 = 1, x_4 = 0$, получим

$$X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Полагая $x_3 = 0, x_4 = 1$, получим

$$X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Эти два вектора образуют базис ортогонального дополнения подпространства L_1.

а) Так как второй вектор системы совпадает с a_2, эта система не ортогональна L_1.

б) Первый вектор системы равен $(-X_1)$, второй - $(-X_1 + X_2)$, заданная система линейно независима и также образует базис ортогонального дополнения подпространства L_1.

в) Первый вектор системы равен $(-X_1)$, второй - $(-X_2)$, заданная система линейно независима и также образует базис ортогонального дополнения подпространства L_1.

Ответ. Системы б) и в).

Задача 8.

Найдите канонический вид квадратичной формы при применении метода ортогонального преобразования. Коэффициенты (включая и нулевые) укажите в порядке их возрастания.

$$3x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_1x_2$$

Решение.

Матрица заданной квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Ее собственные значения:

$$|A - \lambda E| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(3-\lambda)^2 - 1 = 0$$

$$9 - 6\lambda + \lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$$

$$\lambda_1 = 2;\ \lambda_2 = 4$$

Таким образом, при применении метода ортогонального преобразованияквадратичная форма примет канонический вид

$$2y_1^2 + 4y_2^2$$

Ответ. Коэффициенты 2, 4.

Задача 9.

Дана матрица квадратичной формы

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Критерий Сильвестра позволяет сделать вывод, что:

а) эта форма является положительно определенной;
б) эта форма является отрицательно определенной;
в) не является знакоопределенной.

Решение.

Найдем главные угловые миноры:

$$\Delta_1 = 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

Для положительной определённости квадратичной формы необходимо и достаточно, чтобы угловые миноры её матрицы были положительны.

Для отрицательной определённости квадратичной формы необходимо и достаточно, чтобы угловые миноры чётного порядка её матрицы были положительны, а нечётного порядка — отрицательны.

Согласно критерию Сильвестра, заданная квадратичная форма не является знакоопределенной.

Ответ. Заданная квадратичная форма не является знакоопределенной.

Задача 10.

Матрица оператора дифференцирования, действующего в пространстве, являющемся линейной оболочкой функций $\{\sin x, \cos x\}$, в базисе $\{\sin x, \cos x\}$, выглядит так…

Решение.

Базисный вектор $e_1 = \sin x$под действием оператора дифференцирования переходит в вектор $e_1' = \cos x = e_2$. Бзисный вектор $e_2 = \cos x$ под действием оператора дифференцирования переходит в вектор $e_2' = -\sin x = -e_1$. Записывая координаты полученных векторов (образов базисных векторов) в столбцы матрицы, получим искомую матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ответ.

$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$