Контрольная работа по дисциплине
«МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»

Вариант № 8

1. Вычислить предел функции.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+1}{x^2-2}-(x-1)\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+1-(x-1)(x^2-2)}{x^2-2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+1-x^3+2x+x^2-2}{x^2-2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-1}{x^2-2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$
$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}{1-\frac{2}{x^2}}=\frac{1}{1}=1$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\log_2\frac{2x^2+x}{x^2+8}=\log_2\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+x}{x^2+8}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\log_2\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x}}{1+\frac{8}{x^2}}=\log_2\frac{2}{1}=\log_2 2=1$

в) $\lim\limits_{x\to2}\frac{1-\sqrt{5x-9}}{3-\sqrt{5x-1}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to2}\frac{\left(1-\sqrt{5x-9}\right)\left(1+\sqrt{5x-9}\right)\left(3+\sqrt{5x-1}\right)}{\left(3-\sqrt{5x-1}\right)\left(3+\sqrt{5x-1}\right)\left(1+\sqrt{5x-9}\right)}=\lim\limits_{x\to2}\frac{(1-(5x-9))\left(3+\sqrt{5x-1}\right)}{(9-(5x-1))\left(1+\sqrt{5x-9}\right)}=$
$=\lim\limits_{x\to2}\frac{(1-5x+9)\left(3+\sqrt{5x-1}\right)}{(9-5x+1)\left(1+\sqrt{5x-9}\right)}=\lim\limits_{x\to2}\frac{(10-5x)\left(3+\sqrt{5x-1}\right)}{(10-5x)\left(1+\sqrt{5x-9}\right)}=\lim\limits_{x\to2}\frac{3+\sqrt{5x-1}}{1+\sqrt{5x-9}}=\frac{3+\sqrt{5\cdot2-1}}{1+\sqrt{5\cdot2-9}}=\frac{3+\sqrt{9}}{1+\sqrt{1}}=\frac{3+3}{1+1}=3$

г) $\lim\limits_{x\to6}\frac{x^2-x-30}{2x^2-11x-6}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to6}\frac{x^2-6x+5x-30}{2x^2-12x+x-6}=\lim\limits_{x\to6}\frac{x(x-6)+5(x-6)}{2x(x-6)+(x-6)}=\lim\limits_{x\to6}\frac{(x-6)(x+5)}{(x-6)(2x+1)}=\lim\limits_{x\to6}\frac{x+5}{2x+1}=$
$=\frac{6+5}{2\cdot6+1}=\frac{11}{13}$

д) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos3x-\cos x}{\cos2x-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{-2\sin\frac{3x+x}{2}\sin\frac{3x-x}{2}}{-2\sin^2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-2\sin2x\sin x}{-2\sin^2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin2x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin x\cos x}{\sin x}=$
$=\lim\limits_{x\to0}2\cos x=2\cos0=2\cdot1=2$

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1-2}{x+1}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x+1}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\left(-\frac{x+1}{2}\right)}\right)^{-\frac{x+1}{2}}\right)^{\frac{-4x}{x+1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-4x}{x+1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-4}{1+1/x}}=e^{-4}$

2. Вычислить производную функции.

а) $y=\frac{1+x^3}{1-x^3}$

$$y'=\frac{(1+x^3)'(1-x^3)-(1+x^3)(1-x^3)'}{(1-x^3)^2}=\frac{3x^2(1-x^3)-(1+x^3)(-3x^2)}{(1-x^3)^2}=\frac{3x^2(1-x^3+1+x^3)}{(1-x^3)^2}=\frac{6x^2}{(1-x^3)^2}$$

б) $y=\frac{3}{4}\left(\sqrt[4]{x^3}+\ln\left(\sqrt[4]{x^3}+1\right)\right)=\frac{3}{4}\left(x^{\frac{3}{4}}+\ln\left(x^{\frac{3}{4}}+1\right)\right)$

$$y'=\frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}x^{\frac{3}{4}-1}+\frac{\left(x^{\frac{3}{4}}+1\right)'}{x^{\frac{3}{4}}+1}\right)=\frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}+\frac{\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}}{x^{\frac{3}{4}}+1}\right)=\frac{9}{16}x^{-\frac{1}{4}}\left(1+\frac{1}{x^{\frac{3}{4}}+1}\right)=\frac{9}{16}x^{-\frac{1}{4}}\cdot\frac{x^{\frac{3}{4}}+1+1}{x^{\frac{3}{4}}+1}=\frac{9}{16}\cdot\frac{x^{\frac{3}{4}}+2}{x^{\frac{1}{4}}\left(x^{\frac{3}{4}}+1\right)}=$$

$$=\frac{9\left(x^{\frac{3}{4}}+2\right)}{16\left(x+x^{\frac{1}{4}}\right)}=\frac{9\left(\sqrt[4]{x^3}+2\right)}{16\left(x+\sqrt[4]{x}\right)}$$

в) $y=(\sin x)\cdot e^{2x}\cdot\ln(\sin x)$

Пролагорифмируем левую и правую часть равенства.

$\ln y=\ln\left((\sin x)\cdot e^{2x}\cdot\ln(\sin x)\right)$

Применим свойства логарифмов: логарифм произведения равен сумме логарифмов, степень выносится за знак логарифма.

$\ln y=\ln(\sin x)+\ln(e^{2x})+\ln(\ln(\sin x))$

$\ln y=\ln(\sin x)+2x+\ln(\ln(\sin x))$

Найдем производную левой и правой части равенства.

$(\ln y)'=\left(\ln(\sin x)+2x+\ln(\ln(\sin x))\right)'$

$$\frac{y'}{y}=\frac{(\sin x)'}{\sin x}+2+\frac{(\ln(\sin x))'}{\ln(\sin x)}$$
$$\frac{y'}{y}=\frac{\cos x}{\sin x}+2+\frac{(\sin x)'}{\sin x\cdot\ln(\sin x)}$$
$$\frac{y'}{y}=\frac{\cos x}{\sin x}+2+\frac{\cos x}{\sin x\cdot\ln(\sin x)}$$

Выразим производную и подставим значение y.

$$y'=y\cdot\left(\frac{\cos x}{\sin x}+2+\frac{\cos x}{\sin x\cdot\ln(\sin x)}\right)=(\sin x)\cdot e^{2x}\cdot\ln(\sin x)\cdot\left(\frac{\cos x}{\sin x}+2+\frac{\cos x}{\sin x\cdot\ln(\sin x)}\right)=$$
$$=e^{2x}(\cos x\cdot\ln(\sin x)+2\sin x\cdot\ln(\sin x)+\cos x)$$

г) $y=(\sin x)^{\ln x}$

Пролагорифмируем левую и правую часть равенства.

$$\ln y=\ln(\sin x)^{\ln x}$$

Применим свойства логарифмов: степень выносится за знак логарифма.

$$\ln y=\ln x\cdot\ln(\sin x)$$

Найдем производную левой и правой части.

$$(\ln y)'=(\ln x)'\cdot\ln(\sin x)+\ln x\cdot(\ln(\sin x))'$$
$$\frac{y'}{y}=\frac{\ln(\sin x)}{x}+\ln x\cdot\frac{(\sin x)'}{\sin x}$$
$$\frac{y'}{y}=\frac{\ln(\sin x)}{x}+\ln x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}$$
$$y'=y\cdot\left(\frac{\ln(\sin x)}{x}+\ln x\cdot ctg\,x\right)=(\sin x)^{\ln x}\cdot\left(\frac{\ln(\sin x)}{x}+\ln x\cdot ctg\,x\right)$$

3. Исследовать функции $f(x)$ и $q(x)$ построить их графики.

а) $f(x)=2x^3-9x^2+12x-5$

Решение.

1. Найдем область определения функции.

D(y): $x\in(-\infty;+\infty)$

2. Исследуем функцию на непрерывность.

Функция не имеет точек разрыва, она непрерывна на всей области определения.

3. Установим, является ли данная функция четной, нечетной.

$$f(-x)=2\cdot(-x)^3-9\cdot(-x)^2+12\cdot(-x)-5=-2x^3-9x^2-12x-5\neq y(x)\neq -y(x)$$

Функция не является ни четной, ни нечетной.

4. Найдем интервалы возрастания и убывания функции и точки экстремума.

$y' = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x^2 - 3x + 2) = 6(x-1)(x-2)$

$y' = 0$

$x_1 = 1$

$x_2 = 2$

Получили две точки экстремума.

Занесем результаты исследования в таблицу.

x	$(-\infty;1)$	1	$(1;2)$	2	$(2;+\infty)$
y'	+	0	–	0	+
y	↗	max	↘	min	↗

Функция возрастает на промежутках $(-\infty;1)\ (2;+\infty)$

Функция убывает на промежутке $(1;2)$

$x = 1$ – точка максимума.

$x = 2$ – точка минимума.

$y_{\max} = y(1) = 2\cdot1^3 - 9\cdot1^2 + 12\cdot1 - 5 = 2 - 9 + 12 - 5 = 0$

$y_{\min} = y(2) = 2\cdot2^3 - 9\cdot2^2 + 12\cdot2 - 5 = 16 - 36 + 24 - 5 = -1$

5. Найдем интервалы выпуклости и вогнутости кривой и ее точки перегиба.

$y'' = (6x^2 - 18x + 12)' = 12x - 18 = 6(2x-3)$

$y'' = 0$

$2x - 3 = 0$

$x = 3/2 = 1{,}5$

Получили точку перегиба.

Занесем результаты исследования в таблицу.

x	$(-\infty;1{,}5)$	1,5	$(1{,}5;+\infty)$
y''	–	0	+
y	$\cap$		$\cup$

График функции выпуклый на промежутке $(-\infty;1{,}5)$

График функции вогнутый на промежутке $(1{,}5;+\infty)$

6. Найдем асимптоты кривой.

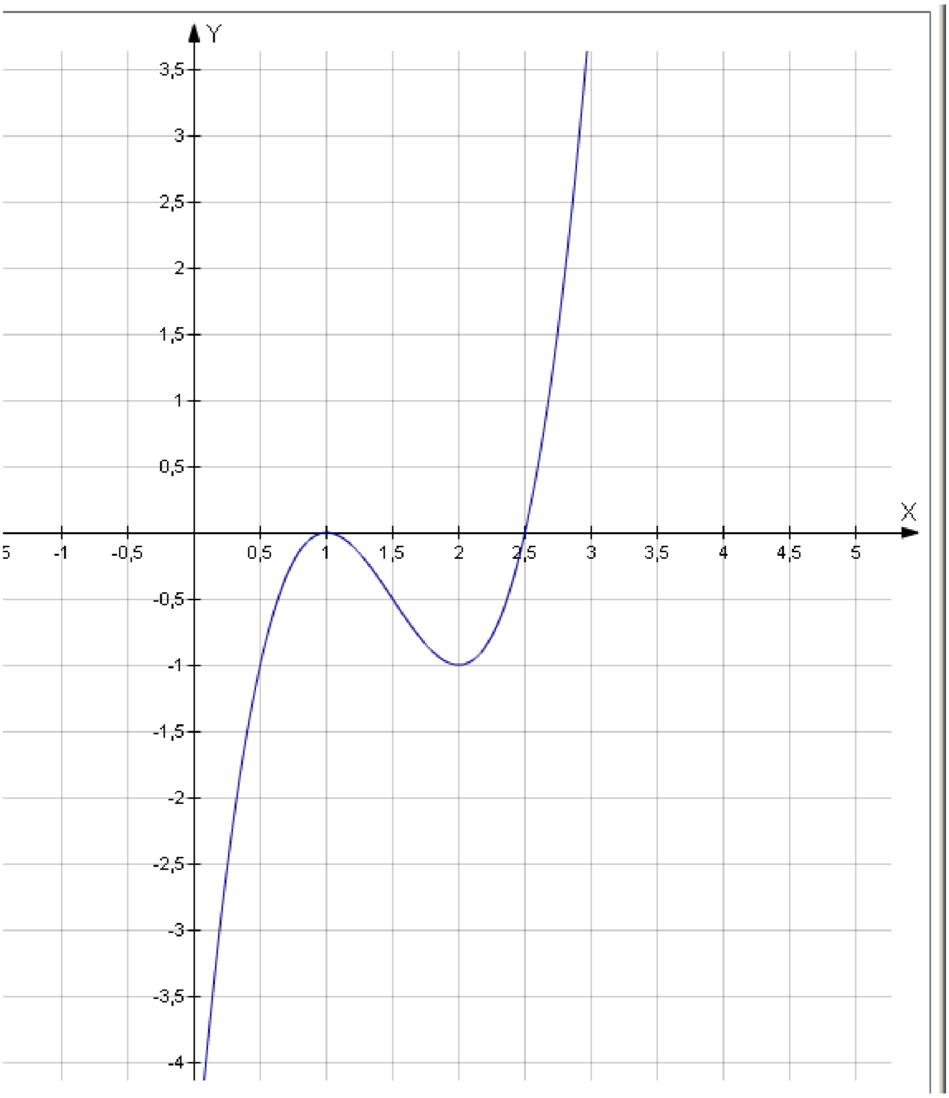
Функция не имеет точек разрыва, следовательно, вертикальных асимптот нет.

Уравнение наклонных асимптот $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^3 - 9x^2 + 12x - 5}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(2x^2 - 9x + 12 - \frac{5}{x}\right) = \infty$$

Наклонных асимптот нет.

7. Построим график функции.



б) $q(x) = 2\cdot(x-6)^2 \cdot e^{\frac{1}{2}x-2}$.

Решение.

1. Найдем область определения функции.

D(*y*): $x \in (-\infty; +\infty)$

2. Исследуем функцию на непрерывность.

Функция не имеет точек разрыва, она непрерывна на всей области определения.

3. Установим, является ли данная функция четной, нечетной.

$q(-x) = 2\cdot(-x-6)^2 \cdot e^{-\frac{1}{2}x-2} = 2\cdot(x+6)^2 \cdot e^{-\frac{1}{2}x-2} \neq q(x) \neq -q(x)$

Функция не является ни четной, ни нечетной.

4. Найдем интервалы возрастания и убывания функции и точки экстремума.

$$q'(x) = 2\cdot\left((x-6)^2\right)' \cdot e^{\frac{1}{2}x-2} + 2\cdot(x-6)^2 \cdot \left(e^{\frac{1}{2}x-2}\right)' = 2\cdot 2(x-6)\cdot e^{\frac{1}{2}x-2} + 2\cdot(x-6)^2 \cdot e^{\frac{1}{2}x-2} \cdot \left(\frac{1}{2}x-2\right)' =$$

$$= 4(x-6)\cdot e^{\frac{1}{2}x-2} + 2\cdot(x-6)^2 \cdot e^{\frac{1}{2}x-2} \cdot \frac{1}{2} = 4(x-6)\cdot e^{\frac{1}{2}x-2} + (x-6)^2 \cdot e^{\frac{1}{2}x-2} = e^{\frac{1}{2}x-2} \cdot (x-6)\cdot(4+x-6) =$$

$$= e^{\frac{1}{2}x-2}(x-6)(x-2)$$

$y' = 0$

$x_1 = 2$

$x_2 = 6$

Получили две точки экстремума.

Занесем результаты исследования в таблицу.

x	$(-\infty; 2)$	2	$(2;6)$	6	$(6;+\infty)$
y'	+	0	–	0	+
y	↗	max	↘	min	↗

Функция возрастает на промежутках $(-\infty; 2)$ $(6;+\infty)$

Функция убывает на промежутке $(2;6)$

x = 2 – точка максимума.

x = 6 – точка минимума.

$y_{\max} = q(2) = 2\cdot(2-6)^2 \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot 2-2} = 2\cdot 16\cdot e^{-1} = \frac{32}{e} \approx 11{,}8$

$y_{\min} = q(6) = 2\cdot(6-6)^2 \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot 6-2} = 2\cdot 0\cdot e = 0$

5. Найдем интервалы выпуклости и вогнутости кривой и ее точки перегиба.

$$y''=\left(e^{\frac{1}{2}x-2}(x-6)(x-2)\right)'=\left(e^{\frac{1}{2}x-2}(x^2-8x+12)\right)'=\left(e^{\frac{1}{2}x-2}\right)'(x^2-8x+12)+e^{\frac{1}{2}x-2}(x^2-8x+12)'=$$

$$=\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x-2}(x^2-8x+12)+e^{\frac{1}{2}x-2}(2x-8)=\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x-2}(x^2-8x+12+4x-16)=\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x-2}(x^2-4x-4)$$

$$y''=0$$

$$x^2-4x-4=0$$

$$x_1=\frac{4-\sqrt{16+16}}{2}=\frac{4-\sqrt{32}}{2}\approx-0{,}8$$

$$x_2=\frac{4+\sqrt{32}}{2}\approx 4{,}8$$

Получили две точки перегиба.

Занесем результаты исследования в таблицу.

x	$(-\infty;-0{,}8)$	$-0{,}8$	$(-0{,}8;4{,}8)$	$4{,}8$	$(4{,}8;+\infty)$
y''	+	0	–	0	+
y	$\cup$		$\cap$		$\cup$

График функции вогнутый на промежутках $(-\infty;-0{,}8)$ $(4{,}8;+\infty)$

График функции выпуклый на промежутке $(-0{,}8;4{,}8)$

6. Найдем асимптоты кривой.

Функция не имеет точек разрыва, следовательно, вертикальных асимптот нет.

Уравнение наклонных асимптот $y=kx+b$.

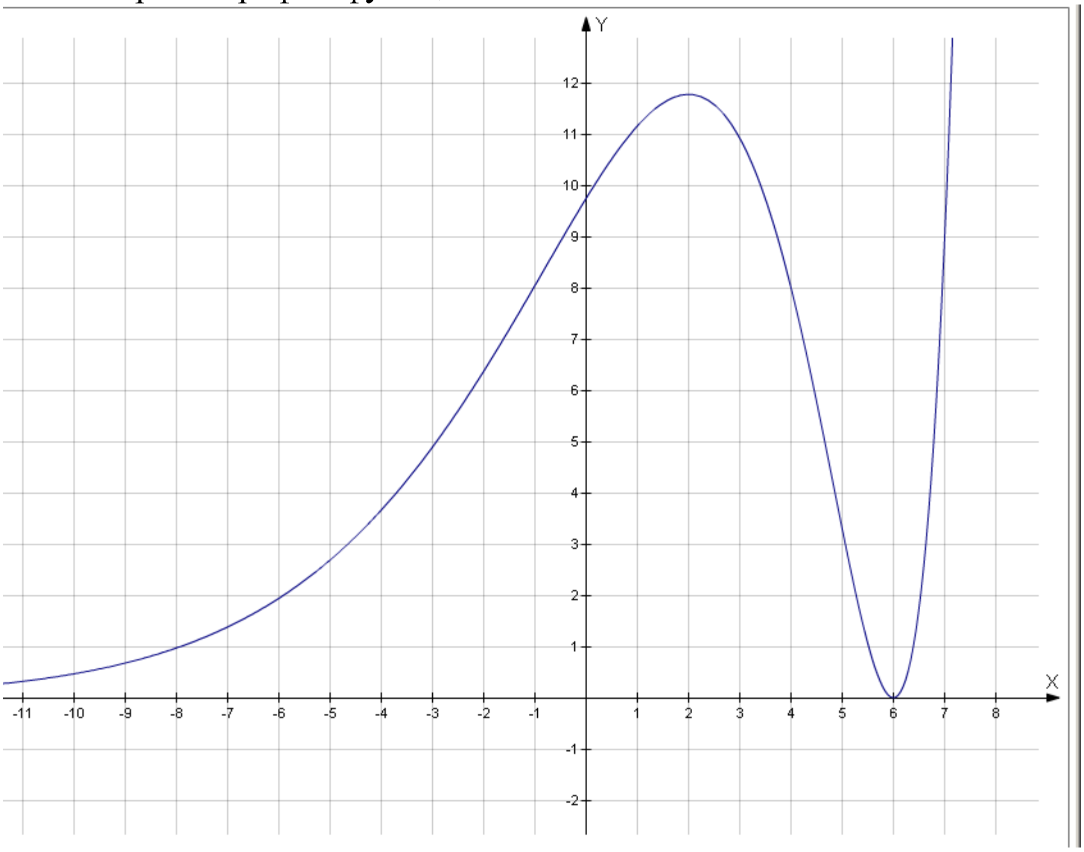
$$\lim_{x\to-\infty}q(x)=\lim_{x\to-\infty}2\cdot(x-6)^2\cdot e^{\frac{1}{2}x-2}=2\lim_{x\to-\infty}\frac{(x-6)^2}{e^{-\frac{1}{2}x+2}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=2\lim_{x\to-\infty}\frac{\left((x-6)^2\right)'}{\left(e^{-\frac{1}{2}x+2}\right)'}=2\lim_{x\to-\infty}\frac{2(x-6)}{-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x+2}}=-8\lim_{x\to-\infty}\frac{x-6}{e^{-\frac{1}{2}x+2}}=$$

$$=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=-8\lim_{x\to-\infty}\frac{(x-6)'}{\left(e^{-\frac{1}{2}x+2}\right)'}=-8\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x+2}}=16\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^{-\frac{1}{2}x+2}}=0$$

Получили горизонтальную асимптоту $y=0$.

$$\lim_{x\to-\infty}q(x)=\lim_{x\to+\infty}2\cdot(x-6)^2\cdot e^{\frac{1}{2}x-2}=2\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-6)^2}{e^{-\frac{1}{2}x+2}}=\infty$$

7. Построим график функции.



4. Вычислить неопределенные интегралы.

а) $\int \frac{\cos\left(\sqrt{x}\right)dx}{2\cdot\sqrt{x}} = \begin{bmatrix} t=\sqrt{x} \\ dt=\dfrac{dx}{2\sqrt{x}} \end{bmatrix} = \int \cos t\,dt = \sin t + C = \sin\sqrt{x} + C$

б) $\int 16x\cos 4x dx = \begin{bmatrix} \int udv = uv - \int vdu \\ u=16x; du=16dx \\ dv=\cos 4x;\ v=\dfrac{1}{4}\sin 4x \end{bmatrix} = 16x\cdot\frac{1}{4}\sin 4x - \int \frac{1}{4}\sin 4x\cdot 16dx = 4x\cdot\sin 4x - 4\int \sin 4xdx =$

$= 4x\cdot\sin 4x - \int \sin 4xd(4x) = 4x\cdot\sin 4x + \cos 4x + C$

в) $\int \frac{xdx}{x^2+2x-35} = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2-2}{x^2+2x-35}dx = \frac{1}{2}\int\left(\frac{2x+2}{x^2+2x-35} - \frac{2}{x^2+2x-35}\right)dx =$

$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x-35}dx - \int \frac{1}{x^2+2x-35}dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+2x-35)}{x^2+2x-35} - \int \frac{1}{x^2+2x+1-36}dx =$

$= \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+2x-35)}{x^2+2x-35} - \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2-6^2} = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x-35\right| - \frac{1}{12}\ln\left|\frac{x+1-6}{x+1+6}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x-35\right| - \frac{1}{12}\ln\left|\frac{x-5}{x+7}\right| + C$

г) $\int \frac{18x-3}{9x^2-18x+10}dx = \int \frac{18x-18+15}{9x^2-18x+10}dx = \int\left(\frac{18x-18}{9x^2-18x+10} + \frac{15}{9x^2-18x+10}\right)dx =$

$= \int \frac{18x-18}{9x^2-18x+10}dx + \int \frac{15}{9x^2-18x+10}dx = \int \frac{d(9x^2-18x+10)}{9x^2-18x+10} + \frac{15}{9}\int \frac{dx}{x^2-2x+\frac{10}{9}} =$

$= \int \frac{d(9x^2-18x+10)}{9x^2-18x+10} + \frac{5}{3}\int \frac{dx}{x^2-2x+1+\frac{1}{9}} = \int \frac{d(9x^2-18x+10)}{9x^2-18x+10} + \frac{5}{3}\int \frac{d(x-1)}{(x-1)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2} =$

$= \ln\left|9x^2-18x+10\right| + \frac{5}{3}\cdot 3arctg\,3(x-1) + C = \ln\left|9x^2-18x+10\right| + 5arctg(3x-3) + C$

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций $f(x)$ и $q(x)$.

$f(x) = -3x^2+21x-11, \qquad q(x) = 3x+4.$

Решение.

Найдем точки пересечения линий.

$-3x^2+21x-11 = 3x+4$

$-3x^2+21x-11-3x-4 = 0$

$-3x^2+18x-15 = 0$

$-3(x^2-6x+5) = 0$

$x^2-6x+5 = 0$

$(x-1)(x-5) = 0$

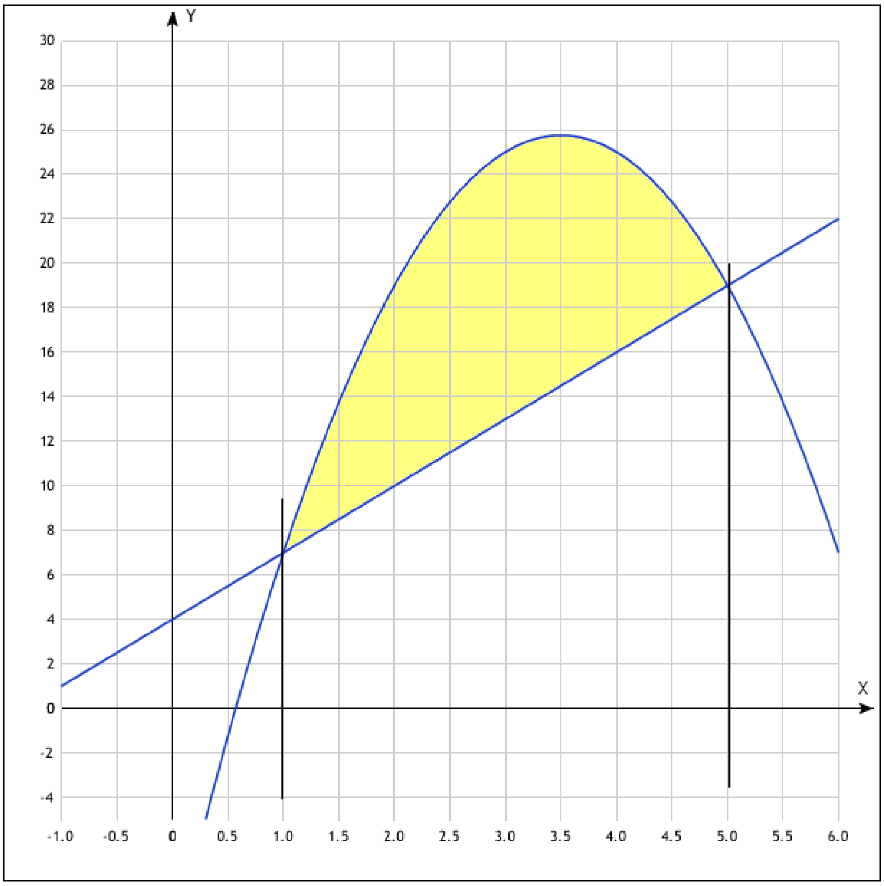
$x_1 = 1,\ x_2 = 5$

Построим фигуру, ограниченную параболой и прямой.

Вычислим площадь этой фигуры через интеграл.

$S = \int_1^5 (-3x^2+21x-11-3x-4)dx = \int_1^5 (-3x^2+18x-15)dx = \left(-x^3+9x^2-15x\right)_1^5 =$

$= \left(-5^3+9\cdot 5^2-15\cdot 5\right) - \left(-1^3+9\cdot 1^2-15\cdot 1\right) = (-125+225-75) - (-1+9-15) = 25+7 = 32\,(ед^2)$



Список литературы

1. *Кремер Н. Ш.* – Высшая математика для экономистов. 2-е изд. М., 2001.

2. *Данко П. Е.* – Высшая математика в упражнениях и задачах / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. М., 2002. Ч. I, II.

3. *Колесников А. Н.* – Краткий курс математики для экономистов. М., 2000.