Контрольная работа по теории вероятностей

Задача 1.

Случайная величина ξ распределена равномерно в интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Найти закон распределения случайной величины $\eta = a\xi + b$.

Решение.

Плотность распределения случайной величины ξ:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}, & x \in \left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right) \\ 0, & x \notin \left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

Функция $y = ax + b$ монотонна и имеет обратную функцию $x = \varphi(y) = \frac{y-b}{a}$,

$$\varphi'(y) = \frac{1}{a}$$

При $x \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$: $y \in \left(b - \frac{|a|\pi}{2}; b + \frac{|a|\pi}{2}\right)$. Тогда плотность случайной величины $\eta = a\xi + b$:

$$f_\eta(y) = f_\xi\big(\varphi(y)\big) \cdot |\varphi'(y)| = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi|a|}, & y \in \left(b - \dfrac{|a|\pi}{2}; b + \dfrac{|a|\pi}{2}\right) \\ 0, & y \notin \left(b - \dfrac{|a|\pi}{2}; b + \dfrac{|a|\pi}{2}\right) \end{cases}$$

Ответ.

$$f_\eta(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi|a|}, & y \in \left(b - \dfrac{|a|\pi}{2}; b + \dfrac{|a|\pi}{2}\right) \\ 0, & y \notin \left(b - \dfrac{|a|\pi}{2}; b + \dfrac{|a|\pi}{2}\right) \end{cases}$$

Задача 2.

Случайные величины ξ и η независимы и распределены по закону Пуассона:

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_1};\ P(\eta = m) = \frac{\lambda_2^m}{m!} e^{-\lambda_2}$$

Найти закон распределения их суммы.

Решение.

Найдем характеристическую функцию распределения Пуассона.

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{ikt} \cdot P(\xi = k) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{ikt} \cdot \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\lambda e^{it}\right)^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda e^{it}} = e^{\lambda(e^{it}-1)}$$

Характеристические функции заданных величин:

$$\varphi_\xi(t) = e^{\lambda_1(e^{it}-1)};\ \varphi_\eta(t) = e^{\lambda_2(e^{it}-1)}$$

Согласно свойствам характеристических функций,

$$\varphi_{\xi+\eta}(t) = \varphi_\xi(t)\cdot\varphi_\eta(t) = e^{\lambda_1(e^{it}-1)}\cdot e^{\lambda_2(e^{it}-1)} = e^{(\lambda_1+\lambda_2)(e^{it}-1)}$$

Эта характеристическая функция соответствует распределению Пуассона с параметром $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$. Закон распределения суммы величины ξ и η:

$$P(\zeta = k) = P(\xi + \eta = k) = \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}$$

Ответ.

$$P(\zeta = k) = P(\xi + \eta = k) = \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}$$

Задача 3.

По заданному закону распределения найти характеристическую функцию $\varphi(t)$, кумулянтную функцию $\gamma(t)$ и первые четыре семиинварианта этого распределения.

а) биномиальный закон (Бернулли):

$$P(\xi = k) = C_n^k\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k},\qquad 0<p<1, k=0,1,\dots,n$$

б)

$$f(x) = \begin{cases} 0, & |x|\ge a \\ \dfrac{a-|x|}{a^2}, & |x|<a \end{cases},\qquad a\ge 0$$

Решение.

а)

Найдем характеристическую функцию биномиального распределения.

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{n} e^{ikt}\cdot P(\xi=k) = \sum_{k=0}^{n} e^{ikt}\cdot C_n^k\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\left(pe^{it}\right)^k(1-p)^{n-k} =$$

$$= \left(1-p+pe^{it}\right)^n$$

Найдем кумулянтную функцию:

$$\gamma(t) = \ln\varphi(t) = \ln\left(1-p+pe^{it}\right)^n = n\ln\left(1-p+pe^{it}\right)$$

Семиинварианты порядка r:

$$k_r = \frac{1}{i^r} \cdot \left(\frac{d^r}{dt^r} \gamma(t) \right) \Bigg|_{t=0}$$

Найдем:

$$\frac{d}{dt}\left(n\ln\left(1-p+pe^{it}\right)\right) = \frac{n}{1-p+pe^{it}} \cdot ipe^{it}; \ \frac{d}{dt}\left(n\ln\left(1-p+pe^{it}\right)\right)\Big|_{t=0} = npi$$

$$k_1 = \frac{1}{i} \cdot npi = np$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(n\ln\left(1-p+pe^{it}\right)\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{npi \cdot e^{it}}{1-p+pe^{it}}\right) = \frac{npe^{it}(p-1)}{(1-p+pe^{it})^2}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(n\ln\left(1-p+pe^{it}\right)\right)\Bigg|_{t=0} = \frac{np(p-1)}{(1-p+p)^2} = np(p-1)$$

$$k_2 = \frac{1}{i^2} \cdot np(p-1) = np(1-p)$$

$$\frac{d^3}{dt^3}\left(n\ln\left(1-p+pe^{it}\right)\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{npe^{it}(p-1)}{(1-p+pe^{it})^2}\right) = \frac{npie^{it}(1-p)\left(-1+p+pe^{it}\right)}{(1-p+pe^{it})^3}$$

$$\frac{d^3}{dt^3}\left(n\ln\left(1-p+pe^{it}\right)\right)\Bigg|_{t=0} = \frac{npi(1-p)(-1+p+p)}{(1-p+p)^3} = -npi(1-p)(2p-1)$$

$$k_3 = -\frac{1}{i^3} \cdot npi(1-p)(2p-1) = np(1-p)(2p-1)$$

$$\frac{d^4}{dt^4}\left(n\ln\left(1-p+pe^{it}\right)\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{npie^{it}(1-p)\left(-1+p+pe^{it}\right)}{(1-p+pe^{it})^3}\right)$$
$$= \frac{npe^{it}(1-p)\left(1-2p+p^2+p^2e^{2it}-4pe^{it}+4p^2e^{it}\right)}{(1-p+pe^{it})^4}$$

$$\frac{d^4}{dt^4}\left(n\ln\left(1-p+pe^{it}\right)\right)\Bigg|_{t=0} = \frac{np(1-p)(1-2p+p^2+p^2-4p+4p^2)}{(1-p+p)^4}$$
$$= np(1-p)(1-6p+6p^2)$$

$$k_4 = \frac{1}{i^4} \cdot np(1-p)(1-6p+6p^2) = np(1-p)(1-6p+6p^2)$$

б)

Найдем характеристическую функцию

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} f(x) dx$$

При $0 \le x < a$: $f(x) = \frac{1}{a^2}(a - x)$, получим

$$\frac{1}{a^2}\int_0^a e^{ixt}(a-x)dx = \begin{vmatrix} u = a - x & dv = e^{ixt}dx \\ du = -dx & v = \frac{1}{it}e^{ixt} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{a^2} \cdot \frac{a-x}{it} e^{ixt} \Big|_0^a + \frac{1}{a^2 \cdot it} \int_0^a e^{ixt} dx = 0 - \frac{1}{ait} + \frac{1}{(ait)^2} e^{ixt} \Big|_0^a = \frac{1}{at} i - \frac{1}{a^2 t^2}\left(e^{ati} - 1\right) =$$

$$= \frac{1 + ait - e^{ait}}{a^2 t^2}$$

При $-a < x < 0$: $f(x) = \frac{1}{a^2}(a + x)$, получим

$$\frac{1}{a^2}\int_{-a}^0 e^{ixt}(a+x)dx = \begin{vmatrix} u = a + x & dv = e^{ixt}dx \\ du = dx & v = \frac{1}{it}e^{ixt} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{a^2} \cdot \frac{a+x}{it} e^{ixt} \Big|_{-a}^{0} + \frac{1}{a^2 \cdot it} \int_{-a}^0 e^{ixt} dx = 0 + \frac{1}{ait} + \frac{1}{(ait)^2} e^{ixt} \Big|_{-a}^{0} = -\frac{1}{at} i + \frac{1}{a^2 t^2}\left(1 - e^{-ati}\right) =$$

$$= \frac{1 - ait - e^{-ait}}{a^2 t^2}$$

Итак, получим:

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} f(x) dx = \frac{1 + ait - e^{ait}}{a^2 t^2} + \frac{1 - ait - e^{-ait}}{a^2 t^2} = \frac{2 - e^{ait} - e^{-ait}}{a^2 t^2} = \frac{2}{a^2 t^2}(1 - \cos at)$$

$$\varphi(t) = \frac{2}{a^2 t^2}(1 - \cos at)$$

Найдем кумулянтную функцию:

$$\gamma(t) = \ln \varphi(t) = \ln \frac{2(1 - \cos at)}{a^2 t^2} = \ln 2 + \ln(1 - \cos at) - 2 \ln a - 2 \ln |t|$$

Семиинварианты порядка r:

$$k_r = \frac{1}{i^r} \cdot \left(\frac{d^r}{dt^r} \gamma(t) \right) \Bigg|_{t=0}$$

Найдем:

$$\frac{d}{dt}\gamma(t)=\frac{a\sin at}{1-\cos at}-\frac{2}{t}=\frac{at\sin at-2+2\cos at}{t(1-\cos at)};$$

$$\left.\frac{d}{dt}\gamma(t)\right|_{t=0}=\lim_{t\to 0}\frac{at\sin at-2(1-\cos at)}{t(1-\cos at)}=0$$

$$k_1=\frac{1}{i}\cdot 0=0$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\gamma(t)=\frac{d}{dt}\left(\frac{a\sin at}{1-\cos at}-\frac{2}{t}\right)=\frac{2(1-\cos at)-a^2t^2}{t^2(1-\cos at)}$$

$$\left.\frac{d^2}{dt^2}\gamma(t)\right|_{t=0}=\lim_{t\to 0}\frac{2(1-\cos at)-a^2t^2}{t^2(1-\cos at)}=-\frac{a^2}{6}$$

$$k_2=\frac{1}{i^2}\cdot\left(-\frac{a^2}{6}\right)=\frac{a^2}{6}$$

$$\frac{d^3}{dt^3}\gamma(t)=\frac{d}{dt}\left(\frac{2(1-\cos at)-a^2t^2}{t^2(1-\cos at)}\right)=\frac{a^3t^3\sin at-4(1-\cos at)^2}{t^3(1-\cos at)^2}$$

$$\left.\frac{d^3}{dt^3}\gamma(t)\right|_{t=0}=\lim_{t\to 0}\frac{a^3t^3\sin at-4(1-\cos at)^2}{t^3(1-\cos at)^2}=0$$

$$k_3=0$$

$$\frac{d^4}{dt^4}\gamma(t)=\frac{d}{dt}\left(\frac{a^3t^3\sin at-4(1-\cos at)^2}{t^3(1-\cos at)^2}\right)=\frac{12(1-\cos at)^2-a^4t^4(2+\cos at)}{t^4(1-\cos at)^2}$$

$$\left.\frac{d^4}{dt^4}\gamma(t)\right|_{t=0}=\lim_{t\to 0}\frac{12(1-\cos at)^2-a^4t^4(2+\cos at)}{t^4(1-\cos at)^2}=\frac{a^4}{60}$$

$$k_4=\frac{1}{i^4}\left(-\frac{a^4}{60}\right)=\frac{a^4}{60}$$

Ответ.

а) $\varphi(t)=\left(1-p+pe^{it}\right)^n$; $\gamma(t)=n\ln\left(1-p+pe^{it}\right)$; $k_1=np$; $k_2=np(1-p)$;

$k_3=np(1-p)(2p-1)$; $k_4=np(1-p)(1-6p+6p^2)$

б) $\varphi(t)=\frac{2}{a^2t^2}(1-\cos at)$; $\gamma(t)=\ln 2+\ln(1-\cos at)-2\ln a-2\ln|t|$;

$k_1=k_3=0$; $k_2=\frac{a^2}{6}$; $k_4=\frac{a^4}{60}$