

Решение контрольной работы выполнено на сайте www.matburo.ru

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=vzfeivm

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

ВЗФЭИ. Контрольная работа № 2

Задача 1. Найти неопределенный интеграл:

$$\int e^{-5x+1}(2x+3)dx.$$

Решение. Интегрируем по частям:

$$\begin{aligned} \int e^{-5x+1}(2x+3)dx &= \left| \begin{array}{l} u = 2x+3 \quad du = 2dx \\ dv = e^{-5x+1}dx \quad v = -\frac{1}{5}e^{-5x+1} \end{array} \right| = -\frac{1}{5}e^{-5x+1}(2x+3) + \frac{2}{5} \int e^{-5x+1}dx = \\ &= -\frac{1}{5}e^{-5x+1}(2x+3) - \frac{2}{25}e^{-5x+1} + C. \end{aligned}$$

Вычислить определенные интегралы:

Задача 2.
$$\int_1^9 \frac{4^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx.$$

Решение. Делаем замену переменной $t = \sqrt{x}$, $x = t^2$, $dx = 2tdt$, $x=1 \Rightarrow t=1$, $x=9 \Rightarrow t=3$.

Получаем:

$$\int_1^9 \frac{4^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int_1^3 \frac{4^t}{t} 2tdt = 2 \int_1^3 4^t dt = \frac{2}{\ln 4} 4^t \Big|_1^3 = \frac{2}{\ln 4} (4^3 - 4^1) = \frac{2}{\ln 4} (64 - 4) = \frac{120}{\ln 4}.$$

Задача 3.
$$\int_4^5 \frac{2x-1}{x^2-2x-3} dx.$$

Решение.

$$\int_4^5 \frac{2x-1}{x^2-2x-3} dx = \int_4^5 \frac{2x-1}{(x+1)(x-3)} dx =$$

Решение контрольной работы выполнено на сайте www.matburo.ru

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=vzfeivm

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

Разложим дробь $\frac{2x-1}{(x+1)(x-3)}$ на элементарные дроби:

$$\frac{2x-1}{(x+1)(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3},$$

$$2x-1 = A(x-3) + B(x+1).$$

При $x=3$ получаем $5 = 4B$, $B = \frac{5}{4}$.

При $x=-1$ получаем $-3 = -4A$, $A = \frac{3}{4}$.

Тогда $\frac{2x-1}{(x+1)(x-3)} = \frac{3}{4} \frac{1}{x+1} + \frac{5}{4} \frac{1}{x-3}$.

Возвращаемся к интегралу:

$$\begin{aligned} &= \int_4^5 \left(\frac{3}{4} \frac{1}{x+1} + \frac{5}{4} \frac{1}{x-3} \right) dx = \left(\frac{3}{4} \ln |x+1| + \frac{5}{4} \ln |x-3| \right) \Big|_4^5 = \\ &= \left(\frac{3}{4} \ln |5+1| + \frac{5}{4} \ln |5-3| \right) - \left(\frac{3}{4} \ln |4+1| + \frac{5}{4} \ln |4-3| \right) = \\ &= \frac{3}{4} \ln 6 + \frac{5}{4} \ln 2 - \frac{3}{4} \ln 5 = \frac{3}{4} \ln \frac{6}{5} + \frac{5}{4} \ln 2. \end{aligned}$$

Задача 4. Решить дифференциальное уравнение:

$$7xy' - \sqrt{xy} = 7y.$$

Решение. Запишем уравнение в виде:

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=vzfeivm

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

$$7xy' - \sqrt{xy} = 7y,$$

$$7xy' = 7y + \sqrt{xy}, | : 7x$$

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{1}{7} \sqrt{\frac{y}{x}}.$$

Получили однородное уравнение вида $y' = f(y/x)$, делаем замену

$z = y/x$, $y = zx$, $y' = z'x + z$. Получаем:

$$z'x + z = z + \frac{1}{7} \sqrt{z},$$

$$z'x = \frac{1}{7} \sqrt{z},$$

$$\frac{dz}{dx} x = \frac{1}{7} \sqrt{z},$$

$$\frac{1}{\sqrt{z}} dz = \frac{1}{7} \frac{dx}{x}.$$

Интегрируем обе части:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z}} = \frac{1}{7} \int \frac{dx}{x},$$

$$2\sqrt{z} = \frac{1}{7} \ln|x| + C,$$

$$z = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{7} \ln|x| + C \right)^2.$$

Переходим обратно к функции y :

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{7} \ln|x| + C \right)^2,$$

$$y = \frac{x}{4} \left(\frac{1}{7} \ln|x| + C \right)^2.$$

Решение контрольной работы выполнено на сайте www.matburo.ru

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=vzfeivm

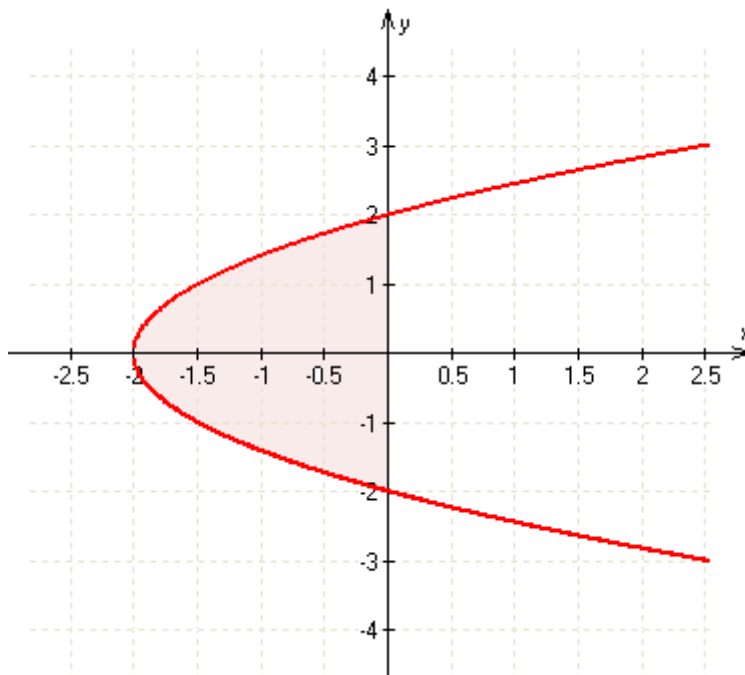
©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

Общее решение: $y = \frac{x}{4} \left(\frac{1}{7} \ln |x| + C \right)^2$

Задача 5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y^2 = 2x + 4, \quad x = 0$$

Решение. Сделаем чертеж и закрасим фигуру:



Выразим

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=vzfeivm

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

$$\begin{aligned}y^2 &= 2x + 4, \\2x &= y^2 - 4, \\x &= \frac{1}{2}y^2 - 2.\end{aligned}$$

Тогда площадь фигуры равна:

$$\begin{aligned}S &= -\int_{-2}^2 \left(\frac{1}{2}y^2 - 2 \right) dy = -2 \int_0^2 \left(\frac{1}{2}y^2 - 2 \right) dy = -\int_0^2 (y^2 - 4) dy = -\left(\frac{1}{3}y^3 - 4y \right) \Big|_0^2 = \\&= -\left(\frac{1}{3}8 - 8 \right) + \left(\frac{1}{3}0 - 0 \right) = \frac{16}{3}.\end{aligned}$$

Задача 6. Экспериментальные данные о значениях переменных x и y приведены в таблице:

x_i	1	2	3	4	5
y_i	0,91	1,02	1,26	1,30	1,41

В результате их выравнивания получена функция $y = \sqrt[4]{x}$. Используя метод наименьших квадратов, аппроксимировать эти данные линейной зависимостью $y = ax + b$ (найти параметры a и b). Выяснить, какая из двух линий лучше (в смысле метода наименьших квадратов) выравнивает экспериментальные данные. Сделать чертеж.

Решение. Параметры a и b уравнения $y = ax + b$ по методу наименьших квадратов можно найти из системы уравнений:

$$\begin{cases} a \sum x_i^2 + b \sum x_i = \sum x_i y_i \\ a \sum x_i + bn = \sum y_i \end{cases}$$

где суммирование ведется по i от 1 до n , $n = 5$. Составим расчетную таблицу:

Решение контрольной работы выполнено на сайте www.matburo.ru

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=vzfeivm

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

Сумма

x_i	1	2	3	4	5	15
y_i	0,91	1,02	1,26	1,3	1,41	5,9
x_i^2	1	4	9	16	25	55
$x_i y_i$	0,91	2,04	3,78	5,2	7,05	18,98

Получаем систему:

$$\begin{cases} 55a + 15b = 18,98, \\ 15a + 5b = 5,9. \end{cases}$$

откуда находим $a = 0,128$, $b = 0,796$, то есть получаем функцию $y = 0,128x + 0,796$.

Выясним, какая из двух линий лучше (в смысле метода наименьших квадратов) выравнивает экспериментальные данные.

Обозначим $y_1 = \sqrt[4]{x}$, $y_2 = 0,128x + 0,796$. Вычислим сумму квадратов отклонений в обоих случаях:

Сумма

x_i	1	2	3	4	5	15
y_i	0,91	1,02	1,26	1,3	1,41	5,9
y_{1i}	1,000	1,189	1,316	1,414	1,495	6,415
y_{2i}	0,924	1,052	1,180	1,308	1,436	5,900

Решение контрольной работы выполнено на сайте www.matburo.ru

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

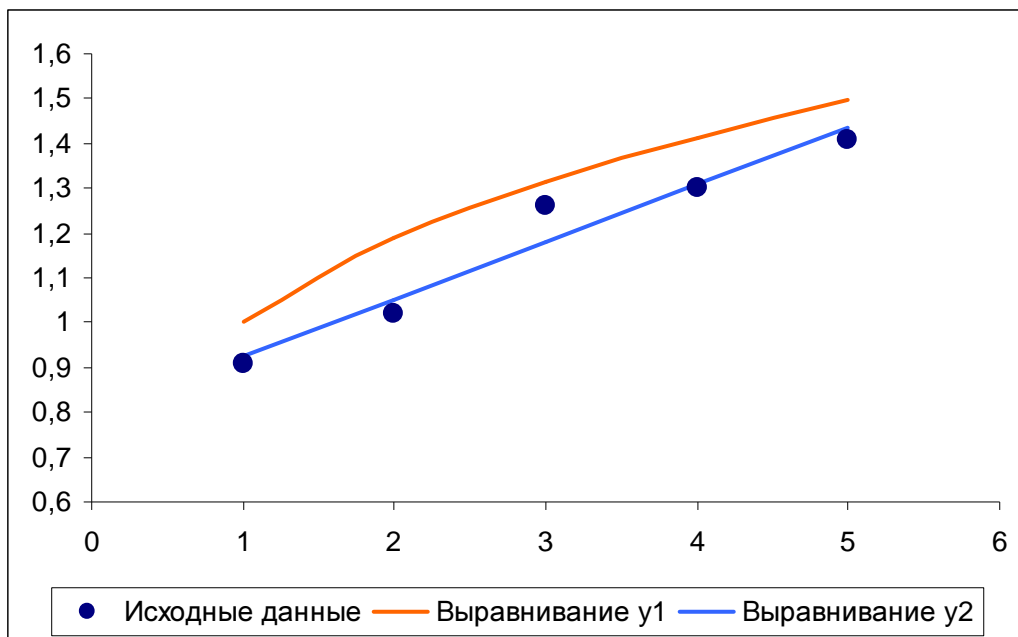
https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=vzfeivm

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

$(y_i - y_{1i})^2$	0,008	0,029	0,003	0,013	0,007	0,060
$(y_i - y_{2i})^2$	0,000	0,001	0,006	0,000	0,001	0,008

Так как $0,008 < 0,06$, вторая линия (прямая, найденная МНК) лучше в смысле метода наименьших квадратов выравнивает данные.

Сделаем чертеж.



Задача 7. Исследовать сходимость числового ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{2n+3} \right)^{\frac{n}{2}}$$

Решение контрольной работы выполнено на сайте www.matburo.ru

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=vzfeivm

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

Решение. Используем необходимый признак сходимости. Найдем предел общего члена ряда:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{2n+3} \right)^{n/2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3-3+1}{2n+3} \right)^{n/2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-2}{2n+3} \right)^{n/2} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{-2}{2n+3} \right)^{\frac{2n+3}{-2}} \right)^{\frac{-2}{2n+3} n/2} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{-n}{2n+3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{-1}{2+3/n}} = e^{-1/2} \neq 0.\end{aligned}$$

Необходимое условие сходимости не выполняется, ряд расходится.