Готовая контрольная по физике ТулГУ

7.1. Частица движется так, что её радиус-вектор зависит от времени по закону

$$\vec{r}(t)=\vec{i}\cdot A\left(\frac{t}{\tau}\right)^3+\vec{j}\cdot\left(B\left(\frac{t}{\tau}\right)^4-A\left(\frac{t}{\tau}\right)^6\right)+\vec{k}\cdot\sin\omega t,$$

где A, B, ω – постоянные величины; **i**, **j**, **k** – единичные орты в декартовой системе координат. Через сколько секунд скорость частицы окажется перпендикулярной оси y, если τ = 1 с.

A = 5 м, B = 3 м, ω = п/2 рад/с.

а) 0,432 с	**б)** 0,632 с	**в)** 0,832 с	**г)** 0,232 с	**д)** 0,132 с

Дано:

$$\vec{r}(t)=\vec{i}\cdot A\left(\frac{t}{\tau}\right)^3+\vec{j}\cdot\left(B\left(\frac{t}{\tau}\right)^4-A\left(\frac{t}{\tau}\right)^6\right)+\vec{k}\cdot\sin\omega t$$

$A=5$ м

$B=3$ м

$\omega=\frac{\pi}{2}$ рад/с

$\tau=1$ с

$t-?$

Решение.

Найдём закон изменения скорости частицы:

$$\vec{\upsilon}(t)=\frac{d\vec{r}}{dt};$$

$$\vec{\upsilon}=\left(\vec{i}\cdot A\left(\frac{t}{\tau}\right)^3+\vec{j}\cdot\left(B\left(\frac{t}{\tau}\right)^4-A\left(\frac{t}{\tau}\right)^6\right)+\vec{k}\cdot\sin\omega t\right)'_t=\vec{i}\cdot\left(A\left(\frac{t}{\tau}\right)^3\right)'_t+$$

$$+\vec{j}\cdot\left(B\left(\frac{t}{\tau}\right)^4-A\left(\frac{t}{\tau}\right)^6\right)'_t+\vec{k}\cdot(\sin\omega t)'_t=\vec{i}\cdot\frac{A}{\tau^3}\cdot(t^3)'_t+\vec{j}\cdot\left(\frac{B}{\tau^4}\cdot(t^4)'_t-\frac{A}{\tau^6}\cdot(t^6)'_t\right)+$$

$$+\vec{k}\cdot\cos\omega t\cdot(\omega t)'_t=\vec{i}\cdot\frac{A}{\tau^3}\cdot 3t^2+\vec{j}\cdot\left(\frac{B}{\tau^4}\cdot 4t^3-\frac{A}{\tau^6}\cdot 6t^5\right)+\vec{k}\cdot\cos\omega t\cdot\omega;$$

$$\vec{\upsilon}(t)=\vec{i}\cdot\frac{3At^2}{\tau^3}+\vec{j}\cdot\left(\frac{4Bt^3}{\tau^4}-\frac{6At^5}{\tau^6}\right)+\vec{k}\cdot\omega\cos\omega t \text{ (м/с).}$$

Скорость частицы будет перпендикулярна оси y в те моменты времени, когда соответствующая координата вектора скорости будет равна нулю:

$$\frac{4Bt^3}{\tau^4}-\frac{6At^5}{\tau^6}=0.$$

Найдём момент времени t, в который это случится (учтём, что по смыслу $t\geq 0$):

$$\frac{6At^5}{\tau^6}=\frac{4Bt^3}{\tau^4};$$

$$t^2=\frac{2B}{3A}\tau^2;$$

$$t=\sqrt{\frac{2B}{3A}}\,\tau;$$

$$t=\sqrt{\frac{2\cdot 3}{3\cdot 5}}\cdot 1\approx 0{,}632 \text{ с.}$$

Ответ: $t=0{,}632$ с.

Правильный ответ: **б)** 0,632 с

7.2. Частица движется так, что её скорость зависит от времени по закону

$$\vec{\upsilon}(t)=\vec{i}\cdot\left(A\frac{t}{\tau}-B\frac{t^2}{\tau^2}\right)+\vec{j}\cdot\left(B\frac{t^3}{\tau^3}-A\frac{t}{\tau}\right),$$

где A, B – постоянные величины; **i**, **j** – единичные орты в декартовой системе координат. Через сколько секунд ускорение частицы будет параллельно оси x, если τ = 1 с, A = 3 м/с, B = 4 м/с?

а) 1,30 с	**б)** 1,10 с	**в)** 0,90 с	**г)** 0,70 с	**д)** 0,50 с

Дано:

$\vec{\upsilon}(t)=\vec{i}\cdot\left(A\frac{t}{\tau}-B\frac{t^2}{\tau^2}\right)+\vec{j}\cdot\left(B\frac{t^3}{\tau^3}-A\frac{t}{\tau}\right)$

$A=3$ м/с

$B=4$ м/с

$\tau=1$ с

$t-?$

Решение.

Найдём закон изменения ускорения частицы:

$$\vec{a}(t)=\frac{d\vec{\upsilon}}{dt};$$

$$\vec{a}=\left(\vec{i}\cdot\left(A\frac{t}{\tau}-B\frac{t^2}{\tau^2}\right)+\vec{j}\cdot\left(B\frac{t^3}{\tau^3}-A\frac{t}{\tau}\right)\right)'_t=\vec{i}\cdot\left(A\frac{t}{\tau}-B\frac{t^2}{\tau^2}\right)'_t+\vec{j}\cdot\left(B\frac{t^3}{\tau^3}-A\frac{t}{\tau}\right)'_t=$$

$$=\vec{i}\cdot\left(A\frac{1}{\tau}-B\frac{2t}{\tau^2}\right)+\vec{j}\cdot\left(B\frac{3t^2}{\tau^3}-A\frac{1}{\tau}\right);$$

$\vec{a}(t)=\vec{i}\cdot\left(\frac{A}{\tau}-\frac{2Bt}{\tau^2}\right)+\vec{j}\cdot\left(\frac{3Bt^2}{\tau^3}-\frac{A}{\tau}\right)$ (м/с^2).

Ускорение частицы будет параллельно оси x, если координата a_y будет равна 0:

$$\frac{3Bt^2}{\tau^3}-\frac{A}{\tau}=0.$$

Найдём момент времени t, в который это случится:

$$\frac{3Bt^2}{\tau^3}=\frac{A}{\tau};$$

$$t^2=\frac{A\tau^2}{3B};$$

по смыслу $t\geq 0$, поэтому:

$$t=\sqrt{\frac{A\tau^2}{3B}};$$

$$t=\sqrt{\frac{3\cdot 1^2}{4\cdot 3}}=0{,}5 \text{ с.}$$

Ответ: $t=0{,}5$ с.

Правильный ответ: **д)** 0,50 с

7.3. Частица начала своё движение из начала координат, и её скорость зависит от времени по закону

$$\vec{\upsilon}(t)=\vec{i}\cdot A\left(\frac{t}{\tau}\right)^3+\vec{j}\cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^5,$$

где A, B – постоянные величины; **i**, **j** – единичные орты в декартовой системе координат. На какое расстояние от начала координат удалится частица в момент времени t = 1 с, если τ = 1 с?

A = 2 м/с, B = 3 м/с.

а) 3,03 м	**б)** 1,01 м	**в)** 0,909 м	**г)** 0,707 м	**д)** 0,505 м

Дано:

$$\vec{\upsilon}(t)=\vec{i}\cdot A\left(\frac{t}{\tau}\right)^3+\vec{j}\cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^5$$

$A=2$ м/с

$B=3$ м/с

$t=1$ с

$\tau=1$ с

$r-?$

Решение.

Найдём зависимость радиус-вектора частицы от времени:

$$\vec{r}(t)=\vec{r}_0+\int_0^t \vec{\upsilon}(t)\,dt;$$

$$\vec{r}=\vec{0}+\int_0^t\left(\vec{i}\cdot A\left(\frac{t}{\tau}\right)^3+\vec{j}\cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^5\right)dt=\vec{i}\cdot\frac{A}{4\tau^3}\int_0^t 4t^3\,dt+\vec{j}\cdot\frac{B}{6\tau^5}\int_0^t 6t^5\,dt=$$

$$=\vec{i}\cdot\frac{A}{4\tau^3}\cdot t^4\Big|_0^t+\vec{j}\cdot\frac{B}{6\tau^5}\cdot t^6\Big|_0^t=\vec{i}\cdot\frac{A}{4\tau^3}\cdot\left(t^4-0^4\right)+\vec{j}\cdot\frac{B}{6\tau^5}\cdot\left(t^6-0^6\right);$$

$$\vec{r}(t)=\vec{i}\cdot\frac{At^4}{4\tau^3}+\vec{j}\cdot\frac{Bt^6}{6\tau^5}\ \text{(м)}.$$

Вычислим радиус-вектор частицы в заданный момент времени:

$$\vec{r}\,(t=1)=\vec{i}\cdot\frac{2\cdot 1^4}{4\cdot 1^3}+\vec{j}\cdot\frac{3\cdot 1^6}{6\cdot 1^5}=\vec{i}\cdot\frac{1}{2}+\vec{j}\cdot\frac{1}{2}\ \text{(м)}.$$

Поскольку в начальный момент времени частица находилась в начале координат, то расстояние до начала координат в любой момент времени будет равно модулю радиус-вектора:

$$r=\left|\,\vec{r}\,(t=1)\right|=\left|\,\vec{i}\cdot\frac{1}{2}+\vec{j}\cdot\frac{1}{2}\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\approx 0{,}707\ \text{м}.$$

Ответ: $r=0{,}707$ м.

Правильный ответ: **г)** 0,707 м

7.4. Частица начала своё движение из начала координат с нулевой начальной скоростью, и её ускорение зависит от времени по закону

$$\vec{a}(t)=\vec{i}\cdot A\left(\frac{t}{\tau}\right)^4+\vec{j}\cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^8,$$

где A, B – постоянная величина; **i**, **j** – единичные орты в декартовой системе координат. Какая величина скорости будет у частицы в момент времени t = 1 с, если τ = 1 с?

A = 2 м/с^2, B = 3 м/с^2.

а) 0,921 м/с	**б)** 0,721 м/с	**в)** 0,521 м/с	**г)** 0,321 м/с	**д)** 0,121 м/с

Дано:

$\vec{a}(t)=\vec{i}\cdot A\left(\frac{t}{\tau}\right)^4+\vec{j}\cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^8$

$A=2$ м/с^2

$B=3$ м/с^2

$t=1$ с

$\tau=1$ с

$\upsilon-?$

Решение.

Найдём зависимость скорости частицы от времени:

$$\vec{\upsilon}(t)=\vec{\upsilon}_0+\int_0^t \vec{a}(t)\ dt;$$

$$\vec{\upsilon} = \vec{0} + \int_0^t \left(\vec{i} \cdot A \left(\frac{t}{\tau} \right)^4 + \vec{j} \cdot B \left(\frac{t}{\tau} \right)^8 \right) dt = \vec{i} \cdot \frac{A}{5\tau^4} \int_0^t 5t^4\, dt + \vec{j} \cdot \frac{B}{9\tau^8} \int_0^t 9t^8\, dt =$$

$$= \vec{i} \cdot \frac{A}{5\tau^4} \cdot t^5 \Big|_0^t + \vec{j} \cdot \frac{B}{9\tau^8} \cdot t^9 \Big|_0^t = \vec{i} \cdot \frac{A}{5\tau^4} \cdot \left(t^5 - 0^5 \right) + \vec{j} \cdot \frac{B}{9\tau^8} \cdot \left(t^9 - 0^9 \right);$$

$$\vec{\upsilon}(t) = \vec{i} \cdot \frac{At^5}{5\tau^4} + \vec{j} \cdot \frac{Bt^9}{9\tau^8} \text{ (м/с).}$$

Величина скорости в момент времени t равна модулю вектора скорость $\vec{\upsilon}$:

$$\upsilon(t) = \left| \vec{\upsilon}(t) \right| = \sqrt{\left(\frac{At^5}{5\tau^4} \right)^2 + \left(\frac{Bt^9}{9\tau^8} \right)^2} \text{ (м/с).}$$

Вычислим величину скорости частицы в заданный момент времени:

$$\upsilon = \upsilon(t=1) = \sqrt{\left(\frac{2 \cdot 1^5}{5 \cdot 1^4} \right)^2 + \left(\frac{3 \cdot 1^9}{9 \cdot 1^8} \right)^2} \approx 0{,}521 \text{ м/с.}$$

Ответ: $\upsilon = 0{,}521$ м/с.

Правильный ответ: **в)** 0,521 м/с

7.5. Частица из состояния покоя начала двигаться по дуге окружности радиуса R = 1 м с угловой скоростью, модуль которой зависит от времени по закону

$$\omega = A \cdot (t/\tau)^6.$$

Через сколько секунд угол между полным ускорением частицы и её скоростью будет равен 45°, если τ = 1 с.

$A = 6 \cdot 10^7$ $с^{-1}$.

а) 0,4 с	**б)** 0,3 с	**в)** 0,2 с	**г)** 0,1 с	**д)** 0,01 с

Дано:

$R = 1$ м

$\omega = A \cdot \left(\dfrac{t}{\tau}\right)^6$

$A = 6 \cdot 10^7$ с$^{-1}$

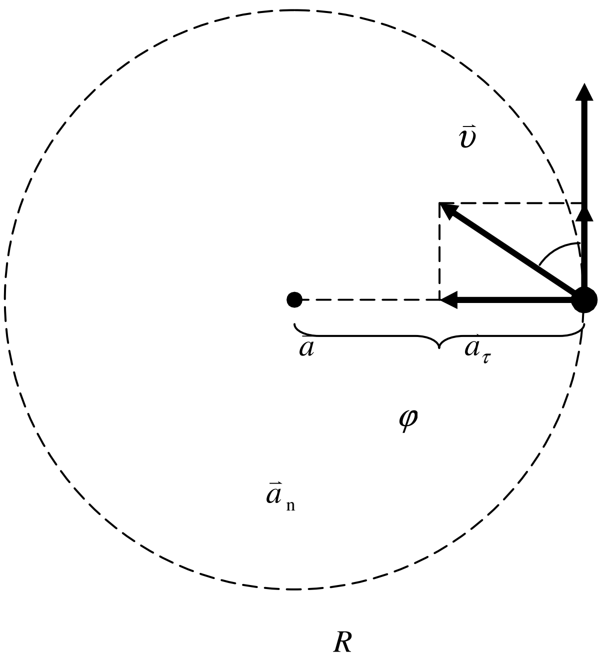
$t = 1$ с

$\tau = 1$ с

$\varphi = 45°$

$t - ?$

Решение.



Найдём зависимость нормального ускорения частицы от времени:

$$a_n(t) = (\omega(t))^2 R = \left(A \cdot \left(\frac{t}{\tau}\right)^6\right)^2 R;$$

$$a_n(t) = \frac{A^2 t^{12} R}{\tau^{12}} \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Найдём зависимость тангенциального ускорения частицы от времени:

$$a_\tau(t) = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R \cdot \left(A \cdot \left(\frac{t}{\tau}\right)^6\right)'_t = R \cdot \left(A \cdot \frac{6t^5}{\tau^6}\right);$$

$$a_\tau(t) = \frac{6ARt^5}{\tau^6} \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Как видно из рисунка, угол φ между полным ускорением $\vec{a}$ частицы и её скоростью $\vec{\upsilon}$ будет равен $45°$, когда нормальное ускорение и тангенциальное ускорение равны по величине:

$$a_n(t) = a_\tau(t).$$

Найдём, в какой момент времени будет выполняться это условие (по смыслу задачи $t > 0$):

$$\frac{A^2 t^{12} R}{\tau^{12}} = \frac{6ARt^5}{\tau^6};$$

$$t^7 = \frac{6\tau^6}{A};$$

$$t = \sqrt[7]{\frac{6\tau^6}{A}};$$

$$t = \sqrt[7]{\frac{6 \cdot 1^6}{6 \cdot 10^7}} = 0{,}1 \text{ с.}$$

Ответ: $t = 0{,}1$ с.

Правильный ответ: **г)** 0,1 с

7.6. Диск радиуса R = 1 м вращался вокруг своей оси с угловой скоростью ω_0. В момент времени t = 0 его угловое ускорение стало возрастать по закону

. Модуль его углового ускорения при этом зависел от времени по закону

$$\varepsilon = A\,(t/\tau)^3.$$

Какую угловую скорость будет иметь диск через время t = 1 с, если τ = 1 с?

$A = 4$ с$^{-2}$, $\omega_0 = 5$ с$^{-1}$.

а) 3,0 с$^{-1}$	**б)** 4,0 с$^{-1}$	**в)** 5,0 с$^{-1}$	**г)** 6,0 с$^{-1}$	**д)** 7,0 с$^{-1}$

Дано:

$R = 1$ м

$\varepsilon = A\left(\frac{t}{\tau}\right)^3$

$A = 4$ с$^{-2}$

$\omega_0 = 5$ с$^{-1}$

$\tau = 1$ с

$t - ?$

Решение.

Найдём зависимость угловой скорости диска от времени:

$$\omega(t) = \omega_0 + \int_0^t \varepsilon(t)\,dt;$$

$$\omega(t) = \omega_0 + \int_0^t \left(A\left(\frac{t}{\tau}\right)^3\right)dt = \omega_0 + \frac{A}{4\tau^3}\int_0^t 4t^3\,dt = \omega_0 + \frac{A}{4\tau^3}\cdot t^4\Big|_0^t = \omega_0 + \frac{A}{4\tau^3}\cdot t^4;$$

$\omega(t) = \omega_0 + \frac{At^4}{4\tau^3}$ (рад/с).

Найдём угловую скорость, которую будет иметь диск через время $t = 1$ с:

$\omega(t=1) = 5 + \frac{4 \cdot 1^4}{4 \cdot 1^3} = 6$ с$^{-1}$.

Ответ: $\omega = 6$ с$^{-1}$.

Правильный ответ: **г)** 6,0 с$^{-1}$